

EXERCICE N : 1 (3 points)

1) Justifier que f est une bijection de $[-1; +\infty[$

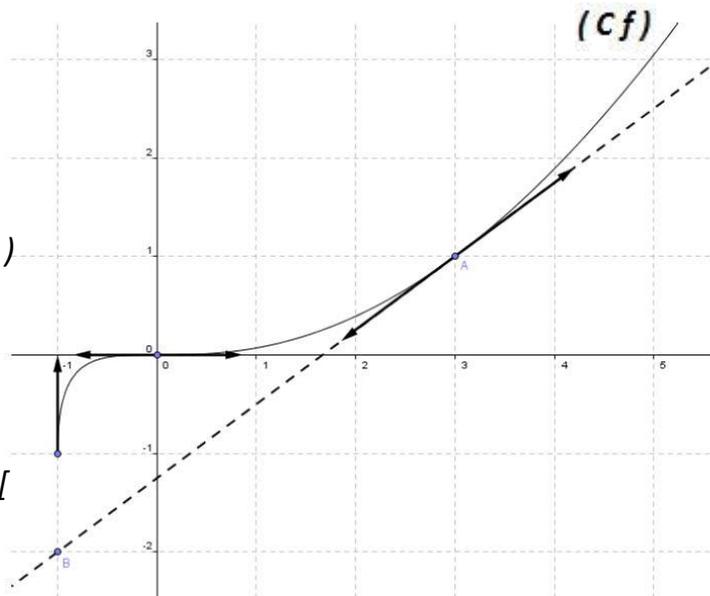
sur un intervalle I que l'on précisera

2) Déterminer : $f'(3)$; $f''(0)$; $f^{-1}([-1; 1[)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)+1}{x+1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x)-3}{x-1} .$$

3) Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]0, 1[$

vérifiant : $(f^{-1})'(\alpha) = 3$.



EXERCICE N : 2 (5 points)

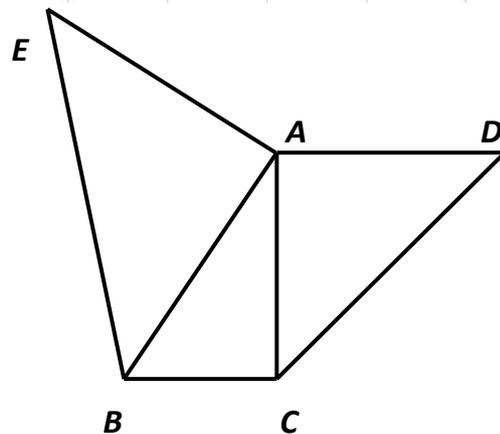
Dans le plan orienté dans le sens direct,

On considère un triangle ABC rectangle en C tel que

$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et les triangles ACD et AEB isocèles

directs et rectangles en A . On désigne par I, J et K

les milieux respectifs de $[CD]$, $[AC]$ et $[AD]$.



1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui envoie A en D et C en A .

b) Prouver que φ est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) Soit le point $F = \varphi(B)$. Montrer que les points A, C et F sont alignés .

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $T = \varphi \circ R$.

a) Déterminer $T(E)$.

b) Montrer que T est une translation dont déterminera le vecteur .

c) En déduire que AEFD est un parallélogramme .

3) Soit ψ l'antidéplacement qui envoie A sur D et C sur A .

a) Montrer que ψ est une symétrie glissante .

b) Déterminer la forme réduite de ψ .

4) Soit J' le symétrique de J par rapport à I .

a) Déterminer $\psi \circ T^{-1}(D)$ et prouver que $\psi \circ T^{-1}(J') = K$.

b) Déduire que $\psi \circ T^{-1} = S_{(CD)}$

c) Déterminer alors l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $\psi(M) = T(M)$.

EXERCICE N : 3 (5 points)

Soit l'équation $(E_\theta) : Z^2 - 2 \cos(2\theta)Z + 2i \sin(2\theta) = 0$; $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

A) 1) a) Montrer que : $[1 - i \sin(2\theta)]^2 = \cos^2(2\theta) - 2i \sin(2\theta)$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) .

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On donne les points I, A, M et M' , d'affixes respectives :

$$Z_I = -1, Z_A = -2, Z_M = e^{2i\theta} - 1 \text{ et } Z_{M'} = e^{-2i\theta} + 1 .$$

Soit $g: P \rightarrow P$; $N_Z \mapsto N'_Z$ tel que $Z' = \bar{Z} + 2$.

1) Montrer que g est la symétrie glissante de vecteur $2\vec{u}$ et d'axe la droite (O, \vec{u}) .

2) a) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M lorsque θ varie dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.

b) Prouver que $g(M) = M'$ puis déduire la construction de l'ensemble (Γ') des points M' lorsque θ varie dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.

3) a) Ecrire chacun des nombres complexes Z_M et $Z_{M'}$ sous forme exponentielle .

b) Déduire que : $(\overrightarrow{OM'}; \overrightarrow{OM}) \equiv 2\theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

c) Déterminer la valeur de θ pour que O, M et M' soient alignés .

4) a) Pour $\theta \neq \frac{\pi}{4}$, déterminer l'affixe du point P tel que $OMPM'$ est un parallélogramme .

b) Montrer que l'aire de $OMPM'$ est $|\sin(4\theta)|$.

c) Déduire les valeurs de θ pour que l'aire de $OMPM'$ soit maximal .

EXERCICE N : 4 (7 points)

A) Soit la fonction f définie sur $]1, 2]$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 2 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

b) Montrer que f est dérivable sur $]1, 2[$ et prouver que pour tout $x \in]1, 2[$; $f'(x) < 0$.

2) a) Dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $]1, 2]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

c) Montrer que pour tout $x \in J$; $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

3) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $]1, 2]$ une unique solution α .

B) Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n \leq 2$.

2) Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$; $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$.

4) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

C) Soit la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par : $g(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(\operatorname{tg} 2x)}$ si $x \in [0, \frac{\pi}{4}[$.

1) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$; $g(x) = \frac{1}{1 + \cos 2x}$.

2) Justifier que g admet une réciproque g^{-1} définie sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

3) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]\frac{1}{2}, 1]$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$.

NetSchool 1
KNOWLEDGE BASE

