Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de synthèse n°I

Classe : 4ème

Décembre 2013

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (4 points)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) La forme exponentielle du nombre complexe $-2e^{-i\frac{\pi}{5}}$ est :

a) $2e^{i\frac{\pi}{5}}$ b) $2e^{i\frac{4\pi}{5}}$ c) $-2e^{i\frac{4\pi}{5}}$

2) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $z = i - e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est :

a) une droite b) un cercle c) l'ensemble vide

3) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x non nul, $-\frac{1}{x^2} - x \leq f(x)$.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

4) Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{\cos n}{n}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas.

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}$, par : $f(z) = z^3 - z^2 - (1-i)z - 2 - 2i$.

1) a) Calculer $f(2)$.

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z

$f(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$.

2) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives 2, $-1+i$ et $-i$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Exercice 3 (5points)

1) Donner les racines cinquièmes de l'unité.

2) Dans la suite de l'exercice on pose $w = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq$, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1}$.

b) En déduire que $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$

3) a) Vérifier que $w^3 = \overline{w}^2$ et $w^4 = \overline{w}$

b) Montrer que : $(w + \overline{w})^2 + (w + \overline{w}) - 1 = 0$.

c) En déduire que $4\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$.

d) Donner alors la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$

Exercice 4 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{2 + u_n}$.

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) à l'aide de trois méthodes différentes.

1) Première méthode

a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4 - \dfrac{8}{2 + u_n}$.

b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \le u_n < 2$.

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Deusième méthode

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géometrique dont on précisera la raison.

b) Exprimer v_n et puis u_n en fonction de n.

c) Retrouver alors les résultats de la question 1) d).

3) Troisième méthode

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \le \dfrac{2}{3}|u_n - 2|$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c) Conclure.

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

Exercice 1

$1)\ b)\ -2e^{-i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)} = 2e^{i\frac{4\pi}{5}}.$

$2)\ b)\ z = i - e^{i\theta} \Leftrightarrow z - i = -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)} \Leftrightarrow |z-i| = 1 \text{ et } \arg(z-i) \equiv \theta + \pi \equiv \theta' \quad [2\pi]$

et puisque $\theta' \in \mathbb{R}$ donc $M(z)$ decrit le cercle de centre $A(i)$ et de rayon 1.

$3)\ a)\ -\frac{1}{x^2} - x \le f(x) \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2} - x\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$

$4)\ a)\ |u_n| = \left\|\frac{\cos n}{n}\right\| = \frac{|\cos n|}{n} \le \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice2

$1)\ a)\ f(2) = 2^3 - 2^2 - 2(1-i) - 2 - 2i = \cancel{8} \cancel{-4} \cancel{-2} + \cancel{2i} \cancel{-2} - \cancel{2i} = 0$

$b)\ \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (z-2)\left(z^2 + az + b\right) = z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b$

$= z^3 \quad - \quad z^2 - (1-i) \quad z - 2 - 2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = -1 \\ b - 2a = -1 + i \\ -2b = -2 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{-2-2i}{-2} = 1 + i \\ b - 2a = 1 + i - 2 = -1 + i \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Alors pour tout } z \in \mathbb{C}, \\ \\ f(z) = (z-2)\left(z^2 + z + 1 + i\right) \end{array} \right.$$

$2)\ a)\ (1-2i)^2 = 1 - 2\times 2i + (2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i.$

Donc $1 - 2i$ est une racine carrée de $-3-4i$

$b)\ f(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)\left(z^2 + z + 1 + i\right) = 0 \Leftrightarrow z = 2 \text{ ou } z^2 + z + 1 + i = 0$

$\Delta = 1 - 4(1+i) = 1 - 4 - 4i = -3 - 4i = (1-2i)^2.$

Donc les solutions sont : $z' = \dfrac{-1-1+2i}{2} = -1 + i$ et $z'' = \dfrac{-1+1-2i}{2} = -i$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est $S_{\mathbb{C}} = \{2, -i, -1+i\}$

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $2,\ -1+i$ et $-i$.

$AB = |z_B - z_A| = |-1 + i - 2| = |-3 + i| = \sqrt{10}\ ;\ AC = |z_c - z_A| = |-i - 2| = |2 + i| = \sqrt{5}$

$BC = |z_C - z_B| = |-i + 1 - i| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$

$$\text{On a } \begin{cases} AC^2 + BC^2 = 10 = AB^2 \Rightarrow \text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } C. \\ AC = BC \Rightarrow \text{le triangle } ABC \text{ est isocèle de sommet principal } C. \end{cases}$$

Exercice 3

1) Les racines cinquièmes de l'unité sont de la forme $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2) a) Il suffit de développer l'expression $(z-1)\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4\right)$ on trouve $z^5 - 1$.

b) $w \neq 1$ donc $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \dfrac{w^5 - 1}{w - 1} = 0$ car $w^5 = 1$.

3) a) $w^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{6\pi}{5} - 2\pi\right)} = e^{-i\frac{4\pi}{5}} = \left(e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)^2 = \overline{w}^2$

$w^4 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{8\pi}{5} - 2\pi\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \overline{w}$

b) $(w + \overline{w})^2 + (w + \overline{w}) - 1 = w^2 + 2w\overline{w} + \overline{w}^2 + w + \overline{w} - 1$

$= w^2 + 2 \times 1 + w^3 + w + w^4 - 1 \quad \left(car\ w\overline{w} = |w|^2 = 1;\ \overline{w}^2 = w^3 \text{ et } \overline{w} = w^4\right)$

$= 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0 \qquad (d'\text{après } 2)\ b))$

c) On sait que $w + \overline{w} = 2\,Re(w) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$

Donc $(w + \overline{w})^2 + (w + \overline{w}) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0.$

d) On pose $t = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \in [0,1]$. L'équation précédente devient $4t^2 + 2t - 1 = 0$

$\Delta' = 5 \Rightarrow t' = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{4} \notin [0,1]$ et $t'' = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ donc $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$

Exercice 4

1) Première méthode

a) $4 - \dfrac{8}{2 + u_n} = \dfrac{8 + 4u_n - 8}{2 + u_n} = \dfrac{4u_n}{2 + u_n} = u_{n+1}$.

b) ⊗ Pour $n = 0$; $u_0 = 1 \in [1,2[$ vraie

⊗ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq u_n < 2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} < 2$.

$1 \leq u_n < 2 \Leftrightarrow 3 \leq 2 + u_n < 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2 + u_n} \leq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{8}{3} \leq \dfrac{-8}{2 + u_n} < -2$

$\Rightarrow \dfrac{4}{3} \leq 4 - \dfrac{8}{2 + u_n} < 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2$ car $1 < \dfrac{4}{3}$

c) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n}{2 + u_n} - u_n = \dfrac{4u_n - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n} = \dfrac{u_n(2 - u_n)}{2 + u_n} > 0$ car $1 \leq u_n < 2$

Donc la suite (u_n) est croissante.

d) (u_n) est croissante et majorée (par 2) donc (u_n) est convergente

On pose $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

$$\left|\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f \text{ est la fonction définie par } f(x) = \dfrac{4x}{2 + x} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in [1,2] \text{ et } f \text{ continue sur } \mathbb{R} \setminus \{-2\} \text{ et en particulier sur } [1,2] \end{array}\right.$$

Donc $f(l) = l$

$f(l) = l \Leftrightarrow \dfrac{4l}{2+l} = l \Leftrightarrow 4l = 2l + l^2 \Leftrightarrow l(l-2) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \notin [1,2]$ ou $l = 2 \in [1,2]$.

2) *Deusième méthode*

a) $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}} = \frac{\dfrac{4u_n}{2+u_n} - 2}{\dfrac{4u_n}{2+u_n}} = \frac{4u_n - 4 - 2u_n}{4u_n} = \frac{2(u_n-2)}{4u_n} = \frac{1}{2}\frac{u_n-2}{u_n} = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n} \Leftrightarrow v_nu_n - u_n = -2 \Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -2 \Leftrightarrow u_n = \frac{-2}{v_n-1} = \frac{2}{1-v_n} = \frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

c) $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{2}{1} = 2$ donc (u_n) converge vers 2.

3) *Troisième méthode*

a) $$|u_{n+1}-2| = \left|\frac{4u_n}{2+u_n} - 2\right| = \left|\frac{2(u_n-2)}{2+u_n}\right| = \frac{2}{2+u_n}|u_n-2|$$

$$u_n \ge 1 \Leftrightarrow 2+u_n \ge 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2+u_n} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{2+u_n} \le \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{2+u_n}|u_n-2| \le \frac{2}{3}|u_n-2|$$

Ce qui donne $|u_{n+1}-2| \le \dfrac{2}{3}|u_n-2|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $\otimes$ Pour $n = 0$, $|u_0 - 2| = 1 \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = 1$ vraie.

$\otimes$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n-2| \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1}-2| \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

$$|u_{n+1}-2| \le \frac{2}{3}|u_n-2| \le \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow |u_{n+1}-2| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

$\otimes$ <u>Conclusion</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n-2| \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c) $$\begin{cases} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n-2| \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ car } \dfrac{2}{3} \in]-1,1[\end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n-2) = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (u_n-2)+2 \Rightarrow (u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = 0+2 = 2$.