L.S.Dar elamen

Mr :Nebti Khaled

Classe :4ème

Devoir de Synthèse N°1

Durée :3h

AS :12/13

Exercice N°1 : (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes une seule est exacte le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ alors :

**a.** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ **b.** $(u_{2n})$ est croissante **c.** $(u_{2n})$ *et* $(u_{2n+1})$ sont adjacentes

2) ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G et soient E et F sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] alors : $S_{(BF)}oS_{(CE)}$est une rotation.

**a.** $R(G,\frac{-2\pi}{3})$ **b.** $R(G,\frac{2\pi}{3})$ **c.** $R(G,\frac{\pi}{3})$

3) Soit z un nombre complexe, alors $|2i\bar{z}+2|$ est égale à :

**a.** $2(1+|z|)$ **b.** $|2z+2i|$ **c.** $|2z-2|$

4) Soit f une fonction dérivable sur$[-2;2]$ dont le tableau de variations de f' est la suivante

| x | -2 | | 2 |
|---|---|---|---|
| f '(x) | 1 ↘ | -3 | ↗ -1 |

$\mathscr{C}$ la courbe de f et Δ une droite d'équation $\Delta: x-2y+2=0$ Alors $\mathscr{C}$ admet :

**a.** une seule tangente parallèle à Δ **b.** deux tangentes parallèle à Δ

**c.** aucune tangente parallèle à Δ

Exercice N°2 : ( 4 pts )

1) Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A.
Déterminer la seule déplacement f, et la seule antidéplacement g, qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

2) Dans la suite de l'exercice on prend ABC un triangle rectangle en A et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, on note O le milieu de segment [BC] et R la rotation de centre C et d'angle $(-\frac{\pi}{3})$

**a.** Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan tels que f(A) = O et f(C) = B.

**b.** En déduire que f est une rotation dont on précisera la mesure principale θ de son angle. Trouver une construction géométrique de son centre I.

**c.** Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IB})$ en déduire que $I \in [AB]$

3) Soit $\varphi = S_{(IC)}oS_{(BC)}oS_{(OI)}oS_{(IC)}$.

**a.** Montrer que $\varphi = Rof$.

**b.** Préciser $\varphi(A)$ puis caractériser$\varphi$. En déduire que $R^{-1}oS_{(AB)} = foS_{(AC)}$.

Exercice N°3 : (6 Pts )

Soit f la fonction définie sur$\mathbb{R}$ par: $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

1) **a.** Dresser le tableau des variations de f.

**b.** Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

2) On désigne par g la restriction de f sur $[-1;+\infty[$

**a.** Montrer que g réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

**b.** Démontrer que $g^{-1}$ est dérivable sur $J\backslash\{\sqrt{2}\}$ .

**c.** Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de $g^{-1}$ dans le même repère

3) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On pose $\Psi(\mathrm{x}) = \mathrm{h}(\tan\mathrm{x}) + \mathrm{h}(\mathrm{cotan}\mathrm{x})$ pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

**a.** Montrer que $\Psi(\mathrm{x}) = 0\ \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

**b.** Montrer que $\Psi$ est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $\Psi'(\mathrm{x})\quad \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

**c.** Retrouver alors que : $\Psi(\mathrm{x}) = 0\quad \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

4) **a.** Pour tout entier naturel n non nul, on associe la fonction $\varphi_n$ définie sur [0 ; 1] par :

$\varphi_n(x) = f(x) - x^n$.

**b.** Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha_n$dans l'intervalle$]0;1[$

**c.** Montrer que $\varphi_{n+1}(\alpha_n) > 0$ et que la suite $(\alpha_n)_n$ est croissante

**d.** En déduire que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et déterminer $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$

*Exercice N°4 :* ( 3,5 pts )

1) **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ( E ): $z^2 - 4z + 16 = 0$

**b.** Ecrire sous forme trigonométrique les solutions de ( E )

**c.** En déduire les solutions de l'équation $z^8 - 4z^4 + 16 = 0$.

2) On donne $\mathrm{P}(\mathrm{z}) = \mathrm{z}^4 - 4\mathrm{z}^3 + 17\mathrm{z}^2 - 4\mathrm{z} + 16$.

**a.** Déterminer les nombres complexes a ; b et c tel que :$\mathrm{P}(\mathrm{z}) = (\mathrm{z}^2 + 1)(\mathrm{a}\mathrm{z}^2 + \mathrm{b}\mathrm{z} + \mathrm{c})$.

**b.** Résoudre alors l'équation $\mathrm{P}(\mathrm{z}) = 0$

**c.** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé$(\mathrm{O};\vec{\mathrm{u}};\vec{\mathrm{v}})$, on désigne par A ; B ; C et D les points d'affixes respectives $i\,;-i\,;2+2\sqrt{3}i\ et\ 2-2\sqrt{3}i$

Montrer que les points A ; B ; C et D situés sur un même cercle que l'on déterminera.

*Exercice N°5 :* (3,5 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Dans la figure ci-dessous : on a représenté les courbes (Γ ) et ( C ) d'une fonction f définie et dérivable sur $]-2;+\infty[$, sa fonction dérivée f ′ , la droite Δ d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{x}$ ; la droite D d'équation D : $y = 0{,}5$ et la droite D' d'équation D' : $\mathrm{y} = \frac{1}{2}\mathrm{x}$

∗ les droites d'équations $\mathrm{x} = -2$ et $\mathrm{y} = \frac{1}{2}\mathrm{x}$ sont des asymptotes à (C).

∗ La droite d'équation $\mathrm{y} = \frac{1}{2}$ est une asymptote à (Γ ).

∗ La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse a

En utilise le graphique comme source des données

1) **a.** vérifier que (C) est la courbe de f .

**b.** Déterminer les limites suivantes $\lim_{x\to(-2)^+} f(x)$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ .

**c.** Dresser le tableau de variations de f .

**d.** Vérifier que pour tout $x > a$ on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

**e.** Vérifier que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans l'intervalle $]0;1[$.

2) On définit la suite U sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \alpha$ .

**b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ .

**c.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ; Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$.