Devoir de synthèse N°1

Lycée Bechri 2011/2012 4ème

Prof: Lahmadi Adel

Exercice N°1 (3 points)

Répondre par **Vrai** *ou* **Faux** ***en justifiant la réponse.***

❶ *L'image dans le plan complexe du nombre complexe* $z=(1+i)^{2012}$ *appartient à l'axe réel.*

❷ *Si f et g sont deux fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *telles que* $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ *et* $\lim_{x\to 0} g(x)=2$ *alors* $\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=1$.

❸ *Soit (* U_n *) la suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $U_n=\dfrac{2^n}{(-5)^{n+1}}$ *, alors* $\lim_{n\to+\infty} U_n=0$.

Exercice N°2 (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

❶ *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2+2\sqrt{2}\,z+6=0$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A=2-i\sqrt{2}$ *et* $z_B=2+i\sqrt{2}$

❷ *Placer dans le plan complexe les points A et B.*

❸ *Montrer que les points A et B appartiennent au cercle* **C** *de centre O et de rayon* $\sqrt{6}$.

❹ *Soient I, J et K les points d'affixes respectives* z_I , z_J *et* z_K *telles que:* $z_I=2i$

z_J *est le nombre complexe de module 2 et d'argument* $\dfrac{3\pi}{4}$; $z_K=-z_J$

a) *Donner la forme algébrique de* z_J .

b) *Placer les points I, J et K dans le plan complexe.*

❺ *Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.*

❻ *Donner le rayon du cercle* **C'** *circonscrit au triangle IJK.*

❼ *Soit* **E** *l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation:* $2<|z|<\sqrt{6}$.

a) *Tracer les cercles* **C** *et* **C'** .

b) *Représenter l'ensemble* **E** *sur le graphique précédent à l'aide de hachures.Justifier.*

Exercice N°3 (6 points)

Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\dfrac{1+U_n^{\,2}}{2U_n} & \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

❶ a) *Montrer que pour tout entier naturel n :* $U_n>1$.

b) *Montrer que la suite U est décroissante.*

En déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

Date
Le 7/12/2011
Durée
2H

❷ a) *Montrer que pour tout entier naturel n :* $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

b) *En déduire que pour tout entier naturel n :* $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) *Calculer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

❸ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$; *On pose* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$

a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$: $n < S_n < n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) *En déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice N°4 **(5 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} - x & si\ x \in]-\infty, 0] \\ x^3 + 2 + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \in]0, +\infty[\end{cases}$

❶ *Déterminer* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

❷ a) *Montrer que f est continue sur* $]-\infty, 0]$

b) *Montrer que* $x^3 + 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^3 + 2 + x^2$ *pour tout* $x > 0$.

c) *Montrer alors que f est continue en 0.*

❸ a) *Montrer que f est dérivable sur* $]-\infty, 0]$.

b) *Déterminer f '(x) pour* $x \in]-\infty, 0]$ *puis déterminer son signe.*

c) Montrer que $x^2 - x \leq \frac{f(x) - 2}{x} \leq x^2 + x$ *pour tout* $x > 0$.

d) *f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement le résultat trouvé.*

Bon Travail