

4<sup>e</sup> année  
Mathématiques  
Devoir de synthèse n° 1

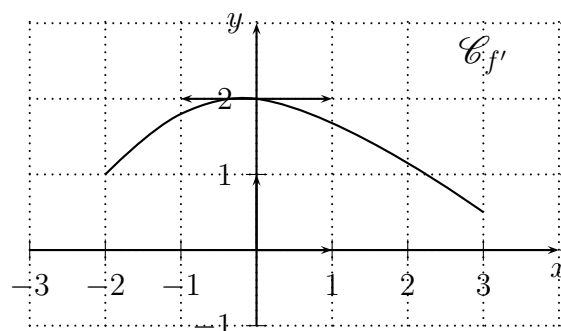
Durée 3 h

### Exercice 1 \_\_\_\_\_ (3 points)

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle  $[-2; 3]$ . On donne ci contre la représentation graphique de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ .

Répondre par VRAI ou FAUX sans justifier la réponse.

1.  $f(-2) \geq f(3)$
2.  $f$  est une bijection de  $[-2; 3]$  sur  $f([-2; 3])$
3. La courbe  $C_f$  admet une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.
4.  $f$  admet un extremum local en 0
5. Le point  $A(0; f(0))$  est un point d'inflexion de la courbe  $C_f$
6.  $|f(3) - f(-2)| \leq 10$



### Exercice 2 \_\_\_\_\_ (3 points)

Soit l'équation  $(E) : 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2 = 0$

1. Montrer que si  $z_0$  une solution dans  $\mathbb{C}$  de  $(E)$  alors  $\bar{z}_0$  et  $\frac{1}{z_0}$  sont aussi des solutions  $(E)$
2. (a) Donner la forme exponentielle du nombre complexe  $u = 1 + i$ .  
(b) Montrer que  $u$  est une solution de  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$ .  
(c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ .

### Exercice 3 \_\_\_\_\_ (4 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + \sin x$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
2. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
3. Soit  $g$  la réciproque de  $f$ . Étudier la dérivabilité de  $g$  sur  $]-\pi, \pi[$ .
4. Soit  $n$  un entier naturel.
  - (a) Montrer que l'équation  $f(x) = n$  admet une solution unique  $\alpha_n$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - (b) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $n - 1 \leq \alpha_n \leq n + 1$
  - (c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

## Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté on donne un triangle rectangle isocèle tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ , on désigne par  $\zeta$  le cercle circonscrit de ce triangle de centre  $O$ .

Soit  $D$  le point du segment  $[BC]$  tel que  $BD = AB$ .

On prendra  $AB = 3$  l'unité de mesure étant le centimètre.

1. Montrer qu'il existe une seule rotation  $r$  qui envoie  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $D$ .
2. On note  $\Omega$  le centre de  $r$ .
  - (a) Calculer une mesure de chacun des angles  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$  et  $(\overrightarrow{D\Omega}, \overrightarrow{DC})$ .
  - (b) Dédire que  $\Omega$ ,  $A$  et  $D$  sont alignés.
  - (c) Montrer que  $\Omega$  appartient à  $\zeta$ . Construire  $\Omega$ .
3. Soit le point  $O' = r(O)$ , Montrer que  $O'$  est équidistant des points  $\Omega$ ,  $D$  et  $B$ .

## Exercice 5 (5 points)

Soit  $f$  la fonction représentée dans la figure 1 (voir feuille annexe) par le quart de cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

1. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .
2. Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on note  $S(t)$  le domaine du plan limité par la courbe de  $f$  et les droites d'équations  $x = 0$ ,  $x = t$  et  $y = 0$  et on désigne par  $\mathcal{A}(t)$  son aire.
  - (a) Calculer  $\mathcal{A}(1)$ .
  - (b) Soit  $h$  un réel strictement positif tel que  $t$  et  $t + h$  appartiennent à  $[0, 1]$ .  
Hachurée dans la figure 1 donnée,  $S(t + h) - S(t)$ .  
A l'aide des considérations d'aires montrer que :
$$hf(t + h) \leq \mathcal{A}(t + h) - \mathcal{A}(t) \leq hf(t)$$
  - (c) Montrer que la fonction  $t \mapsto \mathcal{A}(t)$  est dérivable sur  $[0, 1]$  puis que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{A}'(t) = f(t)$ .
3. Soit  $F$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par :

$$F(x) = \mathcal{A}(\cos x) + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

- (a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  puis calculer  $F'(x)$ .
- (b) Calculer  $F(0)$  puis déduire l'expression de  $\mathcal{A}(\cos x)$  en fonction de  $x$ .
- (c) Calculer l'aire de du plan colorée donnée dans la figure 2.

# Feuille annexe

Nom.....

Prénom.....

N....

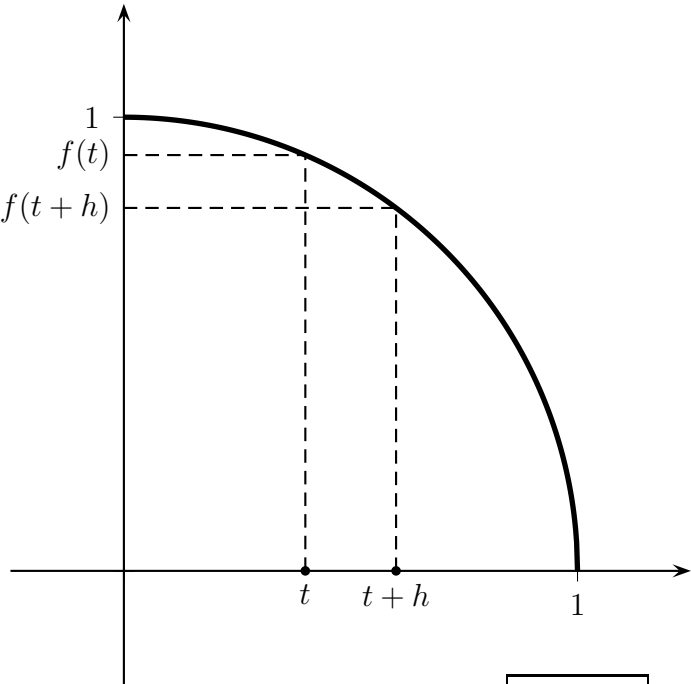


Figure 1

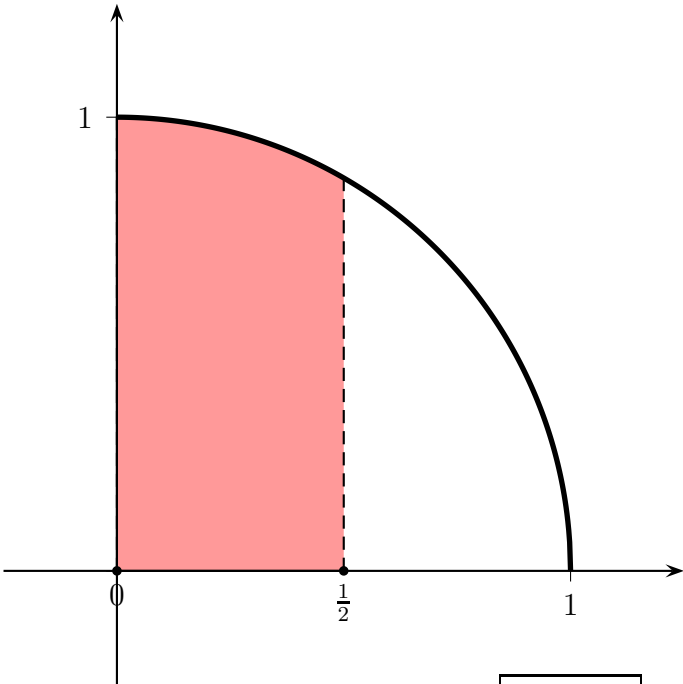


Figure 2

*NetSchool 1*  
KNOWLEDGE BASE