

Exercice 1 : (3 points)

Répondre par " vrai " ou " faux " (aucune justification n'est demandée).

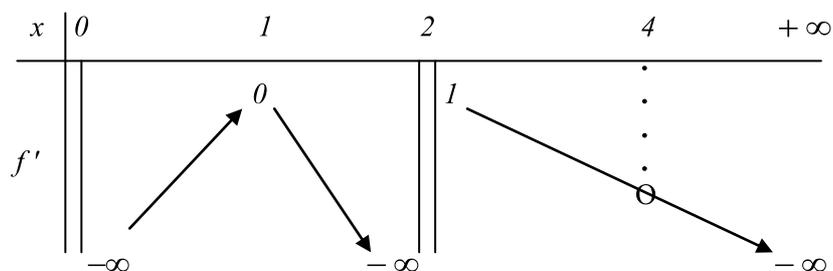
1. La fonction $f : x \mapsto x \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ est dérivable sur $[0,1[$.
2. La dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(\cos x)$ est la fonction $x \mapsto \cos(\cos x)$.
3. La fonction $x \mapsto x \cotan(x)$ est prolongeable par continuité en 0.
4. L'équation $\sqrt{1-x^3} = x$ admet dans $[0,1]$ une solution unique.

Exercice 2 : (4 points)

Soit f est une fonction définie, continue sur $]0, +\infty[$ [et dérivable sur les intervalles $]0, 2[$ et $[2, +\infty[$.

(C) est la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction dérivée f' de f .



1. Déterminer l'extremum de f et l'abscisse du point d'inflexion de (C).
2. Comparer $f(2)$ et $f(4)$ en justifiant.
3. Montrer que $f(4) \leq 2 + f(2)$ (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).
4. Donner le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sachant que $f(1) = 2, f(2) = 1, f(4) = 2,$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
5. On donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Donner l'allure de (C) en précisant les points remarquables et les demi-tangentes.

Exercice 3 : (5 points)

Soit a un nombre complexe. On considère dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation:

$$(E) : z^2 + (a - 2 - ia)z + ia(2 - a) = 0.$$

1. Vérifier que ia est solution de (E) puis résoudre (E).
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives $ia, 2 - a$ et $-a$.
 - a. Montrer que A, B et C sont distincts deux à deux si et seulement si $a \notin \{0, 1-i\}$.
 - b. Montrer que OABC est un losange si et seulement si $a = -2i$.
3. On considère l'application $f : P \rightarrow P \quad M(z) \mapsto M'(z')$; $z' = iz + 2$.
 - a. Déterminer la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.
 - b. Déterminer l'image de A par f .
 - c. Soit Ω le point tel que ΩAB est un triangle rectangle et isocèle en Ω de sens direct. Montrer que lorsque a varie le point Ω reste fixe.

voir verso \Rightarrow

Exercice 4: (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de centre O . On note par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1. Soit f l'isométrie telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$ et $f(C) = D$.

a. Déterminer l'image de l'angle orienté $(\overline{AB}, \overline{AC})$ par f . En déduire que f est un déplacement.

b. Vérifier que f est une rotation que l'on caractérisera.

2. Soit l'application $g = f \circ S_{(AB)}$.

a. Déterminer $g(A)$ et $g(B)$. En déduire que g est une symétrie glissante.

b. Déterminer l'axe et le vecteur de g .

3. a. Montrer que $g \circ f^{-1} = S_{(BC)}$.

b. En déduire que les images d'un point M par f et g respectivement sont symétriques par rapport à la droite (BC) .

4. Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Caractériser l'application $h = f \circ R$.

Exercice 5: (4 points)

On considère les suites u et v définies sur \mathbb{N} par $u_0 = v_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n}$ et $v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$.

1. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} ; $0 \leq u_n \leq 3$ et $0 \leq v_n \leq 3$.

2. On définit les suites (a_n) et (b_n) sur \mathbb{N} par : $a_n = u_n - 1$ et $b_n = v_n - 2$.

a. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} on a : $|a_{n+1}| \leq |b_n|$ et $|b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n|$.

En déduire que $|a_{n+2}| \leq \frac{1}{2}|a_n|$ et $|b_{n+2}| \leq \frac{1}{2}|b_n|$.

b. Montrer alors, par récurrence, que pour tout n de \mathbb{N} on a : $|a_{2n}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $|b_{2n}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c. Déterminer les limites respectives des suites (u_{2n}) et (v_{2n}) .

* * * * *

Bon travail