

Lycée Secondaire H. Ghezez	Devoir de Synthèse N° 1	Pr : Mr Y.Boulila
Durée : 3 heures		

EXERCICE N° I :(6 points)

Pour chacune des questions suivantes sont proposées 4 assertions chacune pouvant être vraie ou fausse. Associer à chacune la bonne réponse sans donner de justification.

Question 1 :

On considère dans \mathbb{C} , l'équation (E) $\bar{Z} = j \times Z^2$

Où $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i \frac{2\pi}{3}}$ Z_0 est une solution de E, non nulle

- a) \bar{Z}_0 est une solution de (E)
- b) $|Z_0| = 1$
- c) $e^{-i \frac{2\pi}{9}}$ est une solution de (E)
- d) $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ est une racine cubique de \bar{j}

Question 2 :

On considère la fonction $f: x \rightarrow x + \cos x$

- a) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et f strictement croissante sur \mathbb{R} .
- b) f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- c) f^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} .
- d) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$ et $(f^{-1})'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$

Question 3 :

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, inscrit dans le cercle (C). Le point D est diamétralement opposé à A. Alors si

$$f = s_{(BD)} \circ s_{(DC)} \text{ et } g = s_{(CA)} \circ s_{(AB)}$$

- a) f est la rotation $R\left(D, \frac{2\pi}{3}\right)$.
- b) g est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BC}$
- c) $f \circ g$ est une translation.
- d) Si $A' = f(A)$ alors C est le milieu de $[AA']$

EXERCICE N°II :(4 points)

Etant donné, dans le plan orienté, deux points O_1 et O_2 , on désigne par M_1 le transformé d'un point quelconque M de ce plan par la rotation de centre de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par M_2 le transformé de M_1 par la rotation de centre O_2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

- 1/ Montrer que le milieu J du segment $[MM_2]$ est un point fixe.
- 2/ Déterminer l'ensemble des points M pour les quels $M, M_1,$ et M_2 sont alignés.
- 3/ Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels : $\frac{MM_1}{M_1M_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 4/ On pose $f = R_2 \circ R_1$ et $g = f \circ s_{(O_1, O_2)}$

Caractériser l'application g .

EXERCICE N°III:(7 points)

Soit f défini par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$; I son ensemble de définition, (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1/ a) Déterminer I .
- b) Etudier la continuité de f sur I , puis la dérivabilité de f sur I .
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- d) Démontrer : $\forall x \in I ; f(x) \geq x$
- e) Tracer (C) ainsi que $\Delta : y=x$
- 2/ a) Démontrer que f réalise une bijection de $[0,2[$ sur un intervalle J à préciser.
- b) Dresser le tableau de variation de f^{-1} sur J .

3/ a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$; l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $[0, 2[$ notée : x_n

b) Déterminer x_0 et x_1

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x_n < x_{n+1}$

d) En déduire que (x_{n-1}) converge et calculer sa limite.

4/ a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})' \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right)$

b) Déterminer f^{-1} et retrouver le résultat précédent.

c) Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère que f .

EXERCICE N°IV:(4 points)

On considère les nombres complexes Z_n ; ($n \in \mathbb{N}$) ; définis par :

$$\begin{cases} Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ Z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{6}} Z_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On désigne par M_n l'image de Z_n dans le plan Complexe muni d'un R.O.N. direct (o, \vec{u}, \vec{v}) . (Unité 4 cm)

1/ Placer les points M_0, M_1, \dots, M_{11}

2/ a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a $Z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{6}\right)}$

b) En déduire les points M_n confondus

3) Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$; $Z_{n+6} + Z_n = 0$ et interpréter le résultat

4/a) Calculer sous forme exponentielle : $\frac{Z_{n+8} - Z_n}{Z_{n+4} - Z_n}$

b) En déduire la nature du triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$