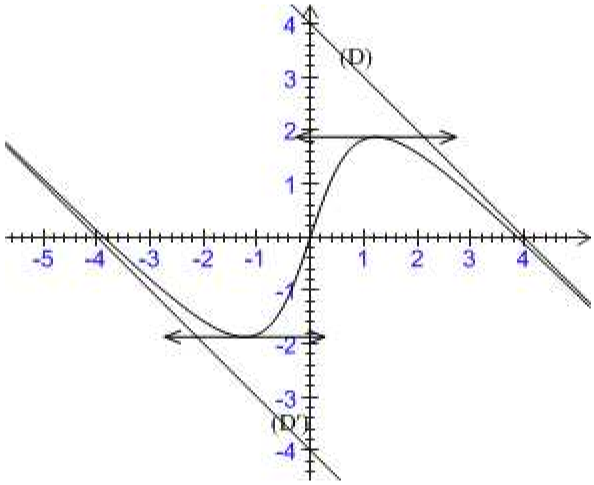
Lycée Chebbi Gabès 09-10	Devoir de Synthèse n°1- 4°M	Amorri Mongi – Durée 3 h

Exercice n°1 :(4 points)

La courbe (C) ci-contre est celle d'une fonction f impaire définie sur $\mathbb{R}$.

(D) et (D') sont deux asymptotes à (C) aux voisinage de +∞ et de -∞ .On donne :

(D) :y=-x+4 .A(1,2 ; 1,9) est un maximum de f .



En utilisant (C) répondre aux questions suivantes :

1- Justifier que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$-x-4 \prec f(x) \prec -x+4$ et calculer les limites de f en +∞ et en -∞

2- Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \;;\; \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \;;\; \lim_{x\to+\infty} f(x)+x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x \;;\; \lim_{x\to+\infty} f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right) \;;\; \lim_{x\to0^+} f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

3-a- Déterminer les images par f des intervalles $]-\infty;-1,9];[-1,2;1,2];[1,2;+\infty[$ en les justifiants.

b-Montrer que l'équation f(x) = 0 possède exactement deux solutions non nulles et donner une valeur approchée à 10^{-1} prés de chaque solution.

Exercice n°2 : (6 points)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{pu_n^2+1} \end{cases}$ où p est un réel non nul

1- On suppose que p = 1.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n}$ .Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2- On suppose que $p \in]0,1[$

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \prec \frac{1}{\sqrt{1-p}}$

b- Etudier la monotonie de la suite (U_n).En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite

3- On suppose que p $\in]1,+\infty[$ .On pose $S_n = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots\dots + p^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$

a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 - u_n^2 = p^n$

b- En déduire que : $u_n = \sqrt{S_n}$

4- On suppose que p est un entier différent de 1

a- Calculer $p^n + (1-p)u_n^2$.En déduire que p^n et 1-p sont premiers entre eux

b- Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E_n): p^n x - (1-p)y = p$.Justifier que l'équation (E_n) possède des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et vérifier que les solutions de (E_n) sont les couples $\left(p + k(1-p), -u_n^2 + kp^n\right); k \in \mathbb{Z}$

c- En déduire dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les solutions de l'équation : $10^n x + 2^{n+2} y = 10.2^{n-1}$

<u>Exercice n°3 : (5 points)</u>

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$,on considère les points A , B , C et D d'affixes respectifs -1 ; 1 ; i et –i .

1- Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; M et M' les points d'affixes respectifs z et z' et M' R(M) .

Exprimer z' en fonction de z .

2- Soit R' l'application du plan P dans lui-même qui au point M d'affixe z ,on associe le points M'' d'affixe z'' tel que z'' = $e^{i\theta} z + 1 - e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]-\pi, 0[$.

a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de R' .

b- Déterminer le réel θ pour que C soit le milieu du segment [M'M''].

3- On suppose que $\theta = -\frac{\pi}{2}$

a- Montrer que M'M'' = 2DM.

b- En déduire l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M' et M'' lorsque M décrit le cercle de centre D et de rayon 1

4- a – Montrer que pour tout M de P$\setminus\{A\}$ et distinct de M' et M'' on a : $\frac{z''-z}{z'-z} = i\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$.

b-En déduire que : $(MM', MM'') \equiv \frac{\pi}{2} + (MA, MB)[2\pi]$ et déterminer l'ensemble $(\mathcal{C}')$ des points M

<u>Exercice n°4 : (5 points) .</u>

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et soient R et R' les rotations de centres respectifs A et B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.On pose f= R o R'

Pour tout point M de [AB] ,on considère les points P et Q appartenant respectivement aux segments [AC] et [BC] ,tels que AM = AP et BM = BQ .

1- Déterminer f(B) et f(C) .En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f
2- a- Montrer que R(M) = P et R'(Q)=M
   b- En déduire que la médiatrice de [PQ] passe par un point fixe Ω
   c- Montrer que : $S_{(A\Omega)}(Q) = S_{(C\Omega)}(P)$
3- a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme B en C et C en A
Préciser la nature et les éléments caractéristiques de g.

   b- Déterminer l'ensemble des milieux des segments [PQ] lorsque le point M décrit le segment [AB].

4- Construire le segment [PQ] sachant que la droite (PQ) est parallèle à une droite (Δ) donnée non perpendiculaire à (AB)