

❖❖❖
DEVOIR DE SYNTHESE N° 1

EPREUVE **MATHEMATIQUES**

❖❖❖
 Mr ABIDI Farid

Durée

Date

Exercice 1 : (3 points)

Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une et une seulement est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

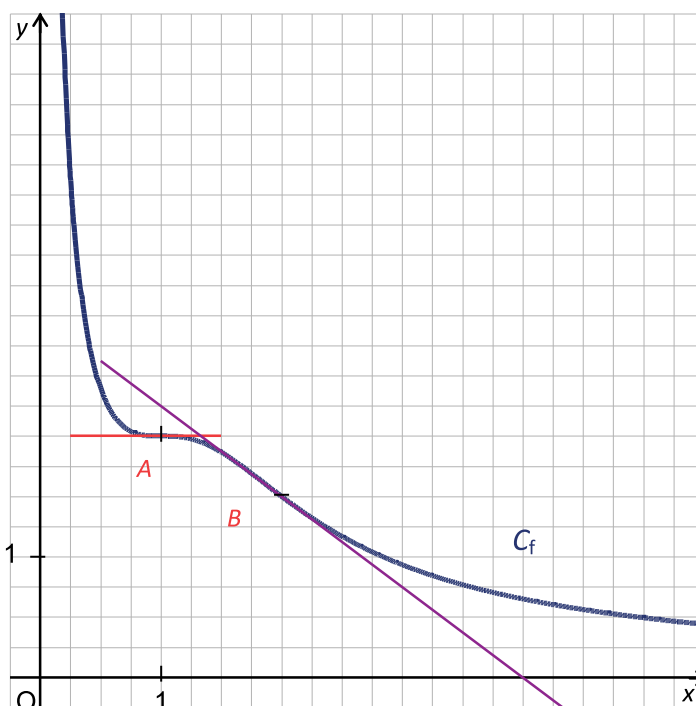
- Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
 - La fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$ admet un extremum local sur $]0, 1[$;
 - La fonction f est croissante sur $[0, 1]$;
 - Pour tout c appartenant à $]0, 1[$, on a : $f'(c) \neq 1$
- On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$;
 - (u_{2n}) est une suite croissante ;
 - les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes .
- Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction dérivable et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. On sait que :
 - Les droites d'équation respectives $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe C_f ;
 - la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A d'abscisse 1 ;
 - la tangente à la courbe C_f au point $B\left(2; \frac{3}{2}\right)$ passe par le point de coordonnées $(4; 0)$

- La courbe représentative de la fonction réciproque f^{-1} admet deux points d'inflexion.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 0$;

- f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$

- et $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$



Exercice 2 : (6 points)

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 5x - 1$.
 - a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
 - b) Montrer que l'équation $x^3 + 5x = 1$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} .
 - c) Etablir que $0 < \alpha < \frac{1}{5}$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère l'équation $(E_n): x^3 + 5x = n$.
 - a) Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation (E_n) admet une et une seule solution α_n dans \mathbb{R} .
 - b) Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.
 - c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\alpha \leq \alpha_n \leq \sqrt[3]{n}$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$.
 - d) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 + 5\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right) = 1$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}} = 1$.
3. On pose $(F_0): 5x = 1$ et pour tout entier naturel n non nul, on considère l'équation $(F_n): x^n + 5x = 1$.
 - a) Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation (F_n) admet une et une seule solution β_n dans $[0, +\infty[$.
 - b) Calculer β_0, β_1 et β_2 . Démontrer que pour tout entier n , $0 < \beta_n \leq \frac{1}{5}$.
En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta_n)^n$.
 - c) En utilisant l'équation satisfaite par β_n , déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$.

Exercice 3 : (5 points)

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit O le milieu de $[AC]$.

On désigne par I le milieu de $[OB]$ et par D le symétrique de O par rapport à (BC) . Soit J le point d'intersection des droites (AD) et (BC) .

1.
 - a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(O) = D$.
 - b) Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
 - c) Soit $K = f(I)$. Montrer que K est le milieu de $[BD]$ et en déduire que les points O, J et K sont alignés.
2. On pose $g = S_{(BO)}$.
 - a) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$.
 - b) En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)}$.

3. On pose $h = S_{(OD)} \circ \quad$. On désigne par (Δ) la médiatrice du segment $[BD]$.
Montrer que h est la symétrie glissante d'axe (Δ) et de vecteur \vec{BO} .
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $h(M) = f^{-1}(M)$.
5. Caractériser l'application $S_{(BO)} \circ \quad$.

Exercice 4 : (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 3 cm.

On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E_\theta) : z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + 1 = 0$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation (E_θ) .
On mettra les solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle où z_1 est celle dont la partie imaginaire est négative.
- b) On désigne par M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_1, z_2 et $z_3 = i$.
Déterminer la valeur de θ pour laquelle $OM_1M_2M_3$ soit un parallélogramme.
- c) Faire une figure pour $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Dans tout ce qui suit, on prend : $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2. Soit t la translation de vecteur \vec{w} d'affixe $(-\sqrt{3} + i)$.
Calculer l'affixe z_4 du point $M_4 = t(M_1)$ puis placer le point M_4 .
3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
Calculer l'affixe z_5 du point $M_5 = r(M_1)$ puis placer le point M_5 .
4. On désigne par z_6 l'affixe du point M_6 le symétrique de M_3 par rapport à O .
Montrer que les racines sixièmes de (-1) sont z_k , avec $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
5. Ecrire le polynôme $z^6 + 1$ sous forme de produit de trois polynômes de second degré à coefficients réels.