Devoir de synthèse n°1 **Classe:** $4^{\text{ième}}$

Durée de l'épreuve : 2H **Prof:** Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - x} & si\ x \in \left]-\infty, 0\right[\\ f(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & si\ \ x \in \left[0, +\infty\right[\end{cases}$$

1°) Montrer que f est continue en 0

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu

3°) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$ on a : $f'(x) = \dfrac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b) Dresser le tableau de variation de f

4°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet, dans $\left]0, +\infty\right[$, une solution unique $\alpha \in \left]1{,}5 ; 1{,}6\right[$

Exercice n°2

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4v_n}{7} \end{cases} \qquad et \qquad \begin{cases} v_0 = 20 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$

1°) a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer w_n en fonction de n

2°) Montrer que pour tout entier naturel n ; $u_n \le v_n$

3°) a) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante

a) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite L

4°) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 7u_n + 12v_n$

a) Montrer que (t_n) est une suite constante

b) En déduire alors la valeur de L

Exercice n°3 (*Bac Tunisien 2003 sections Sc&T*)

Soit m un réel non nul

1°)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - (1 + m^2) = 0$

2°) Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$f(z) = z^3 - 3iz^2 - (3 + m^2)z + i(1 + m^2).$$

a) Vérifier que $f(i) = 0$; en déduire une factorisation de $f(z)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, M' et M'' d'affixes respectives i, $i + m$ et $i - m$

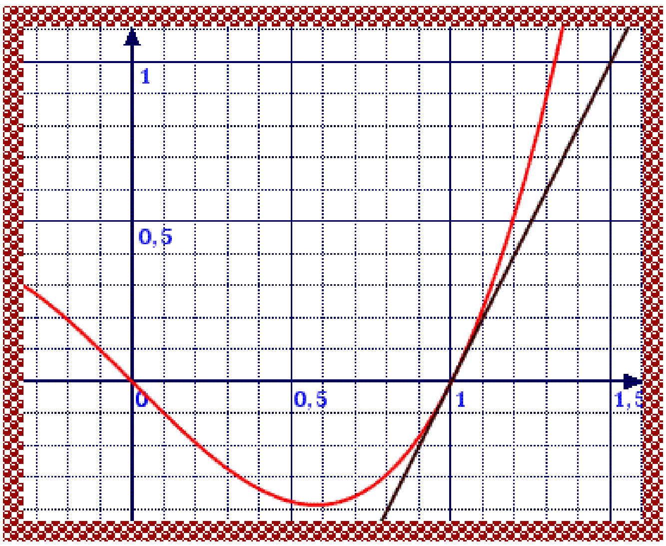
a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M'']$.

b) Montrer que le triangle OM'M" est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle OM'M" soit équilatéral.

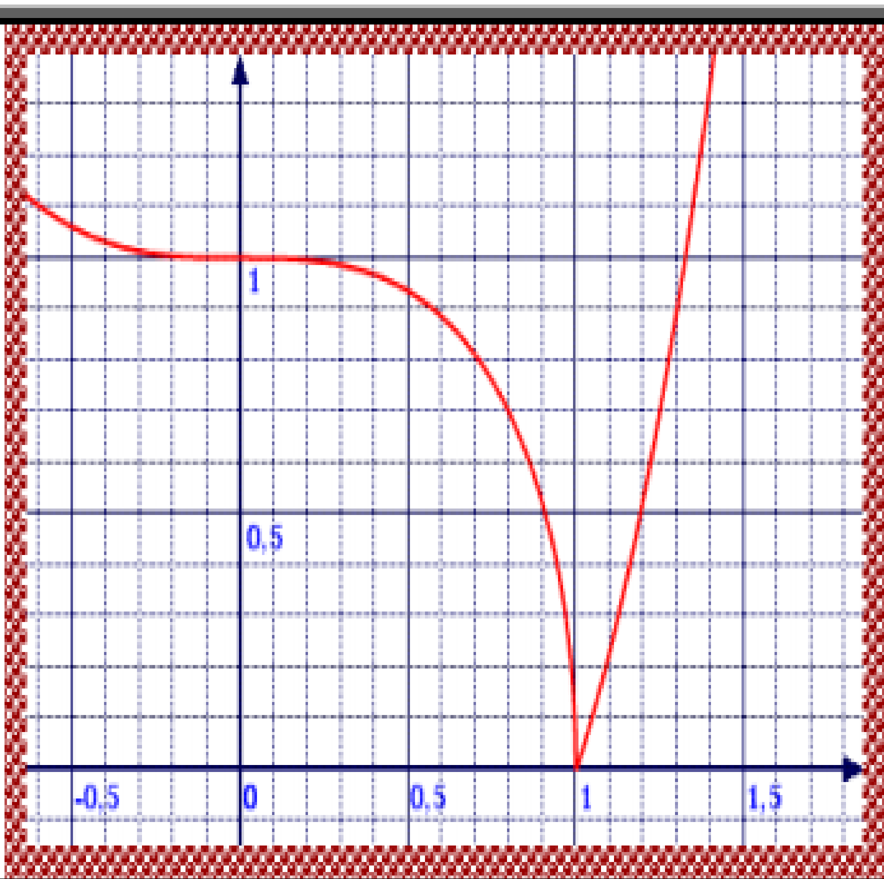
Exercice n°4

Pour chaque question, une seule des propositions données est correcte
L'élève doit cocher une seule des réponses données pour chaque question
1 pt *pour une bonne réponse ,* ***- 0,25 pt*** *pour une réponse fausse.*
0 pt *dans le cas d'une réponse ambiguë ou absence de réponse*
Les notes pour cet exercice vont de 0 à 4.

1°) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f Déterminer $f'(1)$		
☐ $f'(1) = 0$	☐ $f'(1) = -2$	☐ $f'(1) = 2$

2°)	

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f



☐ f dérivable en 1	☐ f dérivable à gauche en 1 et n'est pas dérivable à droite en 1	☐ f dérivable à droite en 1 et n'est pas érivable à gauche en 1

3°)Si (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n non nul on a :

$|u_n + 1| \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, alors :

☐ (u_n) n'est pas convergente	☐ (u_n) converge vers 1	☐ (u_n) converge vers 0

4°)Les racines quatrième de 16 sont de la forme :

☐ $z_k = 2e^{i\frac{k\pi}{2}}$ avec $k \in \{0,1,2,3\}$	☐ $z_k = 2e^{i\frac{k\pi}{4}}$ avec $k \in \{0,1,2,3\}$	☐ $z_k = \sqrt{2}e^{i\frac{k\pi}{2}}$ avec $k \in \{0,1,2,3\}$

Correction Du Devoir de synthèse n°1

ID=DS4S0001

Correction de l'exercice n°1

1°) $\lim_{0^-} f = \lim_{x\to 0^-} 2-\sqrt{x^2-x} = 2$
$\lim_{0^+} f = \lim_{x\to 0^+} 1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2$
$\Rightarrow \lim_0 f = 2$. et on a: $f(0)=2$.

$\lim_0 f = f(0) \Rightarrow f$ Continue en 0.

2°) * $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2-\sqrt{x^2-x}-2}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}$

$= \lim_{x\to 0^-} -\frac{x^2-x}{x\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x}} = +\infty.$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à gauche en 0 et la Courbe de f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

* $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)} = 0$

$\Rightarrow f$ dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$ et la Courbe de f admet, à droite, au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

3°) a) Pour $x \in]0,+\infty[$ on a: $f(x) = 1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$f'(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

b) Pour $x \in]-\infty,0[$; $f(x) = 2-\sqrt{x^2-x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}} & \text{si } x<0 \\ f'(x) = \dfrac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\infty \,\|\, 0$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

4°) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

g dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ (car $f'(x) < 0$ pour $x > 0$)

$\Longrightarrow$ g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. (1)

de plus on a : $g(1,5) \cdot g(1,6) =$

donc il existe $\alpha \in]1,5 ; 1,6[$ tq $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$

d'après (1) α est unique dans $]0,+\infty[$.

Correction de l'exercice n°2

1°) a) $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{3u_n + 4v_n}{7} = \dfrac{7u_n + 14v_n - 9u_n - 12v_n}{21}$

$$= \frac{-2u_n + 2v_n}{21} = \frac{2}{21}(v_n - u_n) = \frac{2}{21} w_n .$$

$\Longrightarrow$ (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{21}$ et de 1er terme $w_0 = 19$

b) Pour tout entier naturel n ; $w_n = 19 \cdot \left(\frac{2}{21}\right)^n$.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $v_n - u_n = w_n = 19\left(\frac{2}{21}\right)^n > 0 . \Rightarrow u_n \leq v_n$

3°) a) $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{7}(v_n - u_n) = \frac{4}{7} w_n > 0 \Longrightarrow (u_n)$ croissante.

$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}(v_n - u_n) = -\frac{1}{3} w_n < 0 \Longrightarrow (v_n)$ décroissante.

b) $\begin{cases} * \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \leq v_n \\ * \; (u_n) \text{ croissante et } (v_n) \text{ décroissante.} \\ * \lim\limits_{+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{+\infty} (-w_n) = 0 \quad \text{car } \frac{2}{21} \in]-1,1[\end{cases}$

$\Longrightarrow (u_n)$ et (v_n) sont deux suites adjacentes.

(u_n) et (v_n) sont adjacentes $\Longrightarrow$ (u_n) et (v_n) sont convergentes et $\lim\limits_{+\infty} u_n = \lim\limits_{+\infty} v_n = L$

4°) a) $t_{n+1} = 7\,u_{n+1} + 12\,v_{n+1} = 3u_n + 4v_n + 4(u_n + 2v_n)$

$= 7u_n + 12v_n = t_n \Longrightarrow (t_n)$ est une suite constante.

b) (t_n) suite constante $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 7u_0 + 12v_0 = 247$.

d'autre part : $\begin{cases} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \; ; \; t_n = 7u_n + 12v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L \end{cases}$

donc $7L + 12L = 247 \Longrightarrow L = \dfrac{247}{19} = 13$.

Correction de l'exercice n°3

1°) $\Delta = (-2i)^2 + 4(1+m^2) = -4 + 4 + 4m^2 = 4m^2 = (2m)^2$.

les solutions : $z' = \dfrac{2i + 2m}{2} = i + m$ et $z'' = \dfrac{2i - 2m}{2} = i - m$.

2°) a) $f(i) = i^3 - 3i.i^2 - (3+m^2)i + i(1+m^2)$

$= \cancel{-i} + \cancel{3i} - \cancel{3i} - \cancel{im^2} + \cancel{i} + \cancel{im^2} = 0$.

$f(i) = 0 \Longrightarrow f(z)$ est factorisable par $z - i$.

$\forall z \in \mathbb{C}$; $f(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes.

$\forall z \in \mathbb{C}$; $f(z) = az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic$
$= az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -3i \\ c - ib = -3 - m^2 \\ -ic = i(1+m^2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2i \\ c = -(1+m^2) \\ c - ib = -1 - m^2 - 2 = -3 - m^2 \text{ vrai.} \end{cases}$

Donc $f(z) = (z-i)\left(z^2 - 2iz - (1+m^2)\right)$.

b) $f(z)=0 \iff z=i$ ou $z^2-2iz-(1+m^2)=0$

$\iff z=i$ ou $z=z'$ ou $z=z''$. (voir 1°).

$S_{\mathbb{C}}=\{i, i-m, i+m\}$.

3°) a) $\dfrac{Aff(M')+Aff(M'')}{2}=\dfrac{i+m+i-m}{2}=i=Aff(A)$

donc $A=M' * M''$.

b) $\left.\begin{array}{l} OM'=|i+m|=\sqrt{m^2+1} \\ OM''=|i-m|=\sqrt{m^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow OM'=OM'' \Rightarrow OM'M''$ isocèle.

c) Le triangle $OM'M''$ est équilatéral ssi $OM'=OM''=M'M''$.

équivaut à $M'M''=\sqrt{1+m^2} \iff 2|m|=\sqrt{1+m^2}$

$\iff 1+m^2=4m^2 \iff 3m^2=1 \iff m=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.