

Exercice 1 : (3 points)

Les trois questions suivantes sont indépendantes. Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions données . Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, strictement croissante sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. Si l'on sait de plus que $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, alors :

- a) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$.
b) L'équation $f'(x) = -2$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.

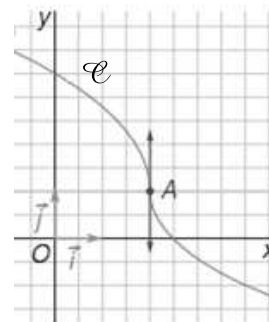
2. Soit f, g et h trois fonctions définies sur \mathbb{R} et vérifiant pour tout x réel , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si l'on sait de plus que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

3. \mathcal{C} est la courbe représentative d'une fonction f passant par $A(2,1)$

- a) f est dérivable en 2 ; b) A est un point d'inflexion de \mathcal{C} .



Exercice 2: (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur $[0, 2]$.

2. a) Montrer que f^{-1} , la fonction réciproque de f , est dérivable sur $]0, 2[$.

b) Déterminer pour tout x de $]0, 2[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$.

3. On pose pour tout x de $[0, 2]$, $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, 2[$ puis calculer, pour tout x de $]0, 2[$, $g'(x)$.

b) En déduire que pour tout x de $[0, 2]$, $f^{-1}(2-x) = -f^{-1}(x)$.

4. On pose pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$.

a) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , $\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \leq u_n \leq \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f^{-1} \left(1 - \frac{1}{n+k} \right)$.

Exercice 3: (5 points)

α est un réel de $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi \right]$, on considère l'équation (E) : $z^2 - (e^{i\alpha} - ie^{-i\alpha} + 2)z - i + 2 = 0$.

1. a) vérifier que $z_1 = e^{i\alpha}$ est solution de (E).

b) Déterminer z_2 l'autre solution de (E) puis vérifier que $z_2 = -i\bar{z}_1 + 2$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, i , z_1 et z_2 .

a) Montrer que l'application φ du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -i\bar{z} + 2$ est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

b) Montrer que, lorsque α décrit $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi \right]$, M_1 décrit l'arc \widehat{BA} du cercle trigonométrique de centre O.

c) En déduire l'ensemble des points M_2 lorsque α décrit $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi \right]$.

Exercice 4: (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct inscrit dans un cercle (\mathcal{C}) de centre O. On note I le milieu du segment [BC] et D le symétrique de A par rapport à O.

1. Montrer que $AO = DB$ et que I est milieu du segment [OD].

2. Soit f une isométrie du plan qui envoie A sur D et O sur B. On pose $g = t_{\vec{BO}} \circ f$ et K le point d'intersection des médiatrices des segments [AD] et [BO].

a) Déterminer $g(O)$ et $g(A)$. En déduire que $g = S_{(BO)}$ ou $g = r_{\left(O, \frac{2\pi}{3} \right)}$.

b) Montrer que l'on a : $f = t_{\vec{OB}} \circ S_{(BO)}$ ou $f = r_{\left(K, \frac{2\pi}{3} \right)}$.

3. On désigne par $f_1 = t_{\vec{OB}} \circ S_{(BO)}$ et $f_2 = r_{\left(K, \frac{2\pi}{3} \right)}$.

a) Déterminer $f_2^{-1} \circ f_1(O)$ et $f_2^{-1} \circ f_1(A)$.

b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $f_1(M) = f_2(M)$.