DEVOIR DE CONTROLE N°1

Exercice n°1 : (7 points)

1) a) Vérifier que : $(1-i\sqrt{3})^2 = -2-2i\sqrt{3}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2-\left(3+i\sqrt{3}\ \right)Z+2+2i\sqrt{3}=0$

2) Le plan complexe est munie d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$).

On considère les points I, A, B et C d'affixes respectifs : $Z_I = 2$, $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $Z_B = \sqrt{3} + i$ et $Z_C = Z_A + Z_B$

a) Ecrire Z_A et Z_B sous forme exponentielle.

b) Construire les points A et B dans le repère.

c) Monter que OA C B est un losange puis construire le point C.

3)a) Ecrire Z_C sous forme algébrique puis déduire que : OC $=\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

b) Vérifier que : $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) Déduire que $Z_C = 4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$

d) Déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

4) Soit D le point d'affixe $Z_D = 2+Z_B$.

a) Montrer que D appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

b) Montrer que les droites (AC) et (ID) sont parallèles

c) Construire le point D en justifiant votre réponse.

Exercice n°2 : (7 points)

Soit la fonction définie sur par IR par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & si\ x \geq 0 \\ 1 + x\sin\frac{1}{x} & si\ x < 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $1+x \leq f(x) \leq 1-x$

b) Déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

c) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$

3) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\frac{1}{x^2+2}\right)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{f(x)-1}$

4) Soit la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par h(x) = f(x) - x

a) Montrer que h est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

b) Déduire que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ puis

vérifier que : $0.7 < \alpha < 0{,}8$.

5) Soit la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = f(tanx).

a) Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que g est prolongeable par continuité à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

c) Vérifier que pour tout $x \epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$: g(x) = cos x

<u>Exercice n°3 :</u> (6 points)

Soit (U_n) et (V_n) les suites définies sur IN par :

$$U_0 = 1 \ , \quad V_0 = 2 \ , \quad U_{n+1} = \frac{U_n \ + \ V_n}{2} \qquad et \quad V_{n+1} = \frac{U_{n+1} \ + \ V_n}{2}$$

1) Soit la suite (W_n) définie sur IN par : $W_n = V_n - U_n$

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

b) Déduire que tout entier naturel n : $U_n \leq V_n$

c) Montrer que (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

d) Déduire que les deux suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite l et que $1 \leq l \leq 2$

2) Soit (S_n) la suite définie sur IN* par : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} w_k$.

a) Calculer (S_n) en fonction de n.

b) Vérifier que pour tout entier naturel k on a : $U_{k+1} - U_k = \frac{1}{2} W_k$

c) Déduire que pout tout n ϵ IN* on a : $U_n = U_0 + \frac{1}{2} \ S_n$

d) Déduire la limite l de (U_n).

<u>Bon travail</u>