Lycée secondaire Zanouche Date: 24 janvier 2018 Durée: 2 heures ☼☼☼	Devoir de synthèse de mathématiques n° 1 Proposé par: Mr.Smairy.J Niveau: 4ème année

Exercice 1: (6 points)

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x - 2$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire l'existence d'un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

c) Vérifier que $0{,}327 < \alpha < 0{,}328$.

<u>On se propose dans la suite de déterminer la valeur exacte de α.</u>

2) a) Vérifier que les nombres $a_1 = -\sqrt[3]{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $a_3 = \sqrt[3]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont les racines cubiques de -2.

b) Vérifier que les nombres $b_1 = \sqrt[3]{4}$, $b_2 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $b_3 = \sqrt[3]{4}\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ sont les racines cubiques de 4.

c) Vérifier que $a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = -2$.

3) Soit a et b deux nombres complexes tels que $a^3 + b^3 = 2$ et $ab = -2$.

a) Montrer que $(a + b)$ est une solution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^3 + 6z - 2 = 0$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 + 6z - 2 = 0$.

c) Déterminer alors la valeur exacte de α.

Exercice 2: (6 points)

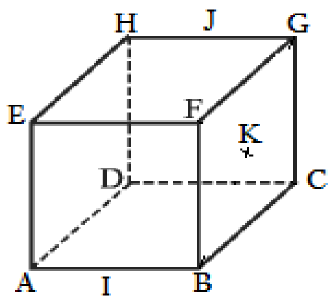
On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1 et on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH] et on désigne par K le centre du carré BCGF.

1) a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (DFI).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (DFI).

c) Calculer la distance du point E au plan (DFI).



2) a) Montrer que le quadrilatère DJFI est un losange.

b) Montrer que l'aire du losange DJFI est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

c) Calculer le volume de la pyramide EDJFI.

3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par E et orthogonale au plan (DFI).

b) Vérifier que K est un point de (Δ).

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de (Δ) et du plan (DFI).

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \frac{4}{3} = 0$.

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que (S) est tangente au plan (DFI) et préciser leur point de contact.

Exercice 3: *(8 points)*

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x+x^2}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) En déduire que, pour tout réel t de $[0,+\infty[$, on a $\frac{2}{3}\le f(t)\le 1$.

d) Tracer la courbe (C_f).

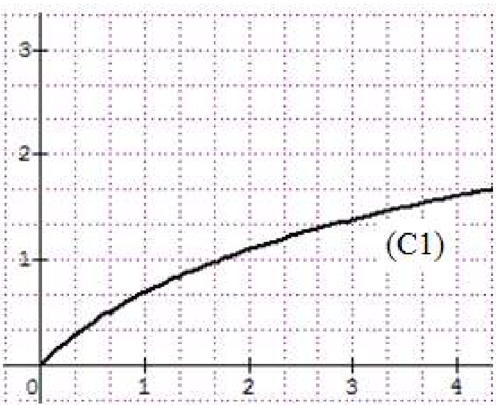
2) Soit F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

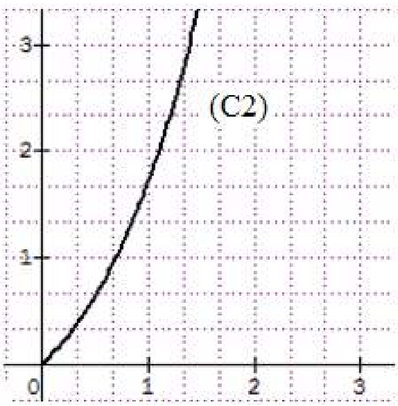
a) Montrer que, pour tout réel x de $[0,+\infty[$, on a $\frac{2}{3}x\le F(x)\le x$.

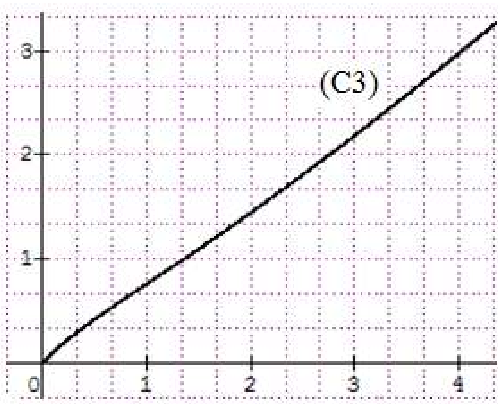
b) En déduire la limite de F en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de F.

d) Parmi les trois courbes ci-dessous, prouver que seule la courbe (C3) est susceptible de représenter F.







3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $F(x)=n$ admet une solution unique x_n dans $[0,+\infty[$.

b) Montrer que la suite (x_n) est croissante et déterminer sa limite.

4) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=2+F(x^2)$.

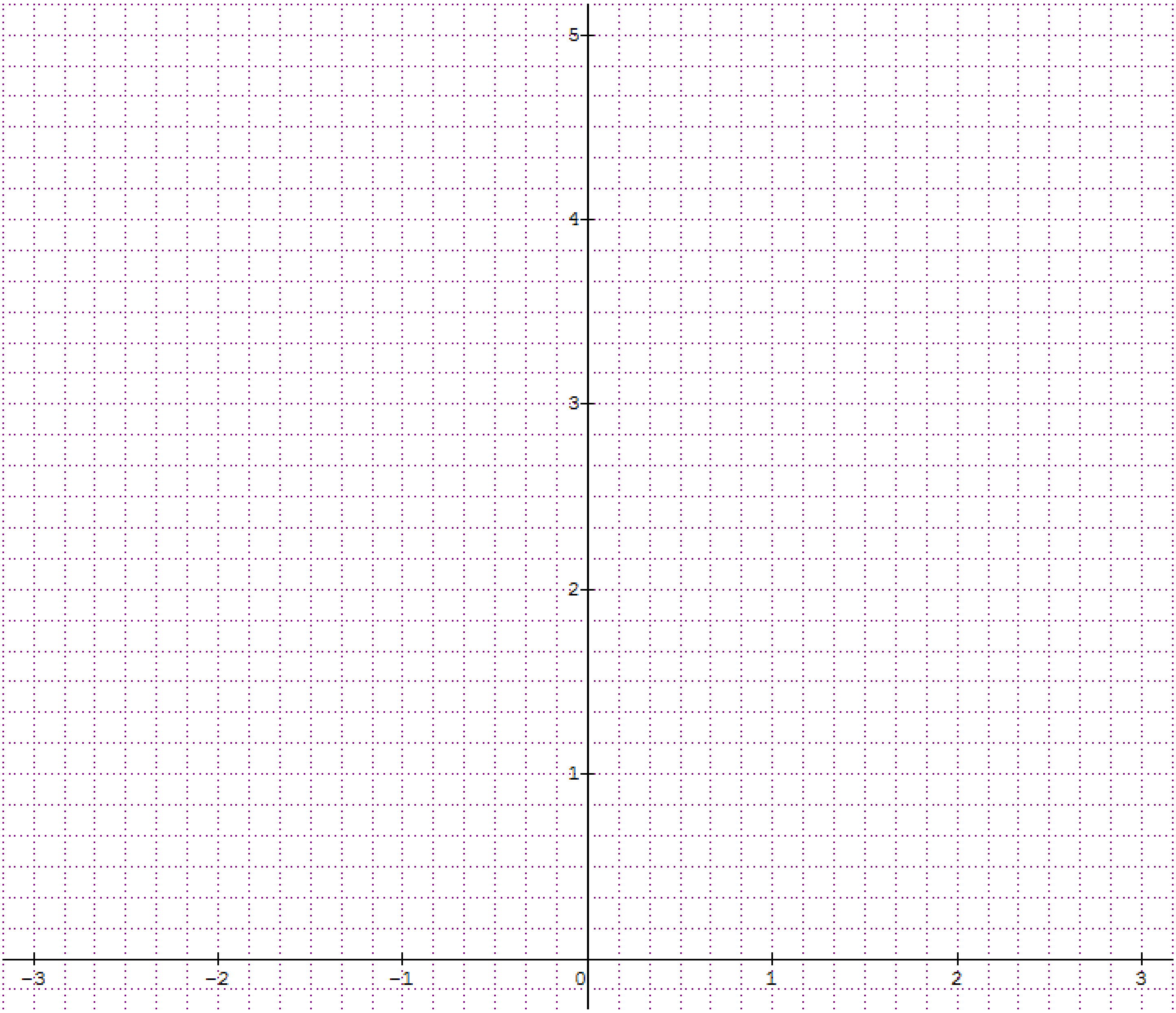
On note (C_g) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que g est dérivable à droite en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Tracer la courbe (C_g).


5
4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3