[redacted]

Devoir de contrôle n°1

Classe : 4ème

[redacted]

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ alors :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x) = 0$ c) $\lim\limits_{x\to 0} fog(x) = +\infty$

2) Si f est une fonction continue sur $\left]-1,1\right[$ et g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors :

a) gof est continue sur $\mathbb{R}$. b) gof est continue sur $\left]-1,1\right[$. c) fog est continue sur $\mathbb{R}$

3) La limite de $x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à :

a) 2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 0

4) Pour tout entier naturel n , $\left(\sqrt{3}+i\right)^{12n}$ est égal à :

a) 2^{12n} b) $2^{12n-1}(1+i\sqrt{3})$ c) $2^{12n-1}(\sqrt{3}+i)$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3\sin(\pi x)}{x-1} & \text{si } x\le -1\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} & \text{si } x>-1\end{cases}$$

1) Montrer que pour tout réel $x \le -1$ on a : $\dfrac{x+3}{x-1} \le f(x) \le \dfrac{x-3}{x-1}$.

2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3) Montrer que f est continue en -1.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\left]-\infty,-1\right[$, au moins deux solutions α et β tels que $-3 < \alpha < -2.5 < \beta < -2$.

Exercice 3 (6 points)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ *est rapporté à un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$

On donne les points A, B *et* C *d'affixes respectives* $a = 2 + i$, $b = -1 - i$ *et* $c = -3 + 2i$.

Pour tout nombre complexe $z \neq c$ *on pose* $Z = \dfrac{z - a}{z - c}$.

1) a) *Donner la forme algébrique du nombre complexe* $w = \dfrac{b - a}{b - c}$.

b) *En déduire la nature du triangle* ABC.

2) a) *On pose* $z = x + iy$ *où* x *et* y *sont des réels*

Vérifier que l'on a : $\begin{cases} Re(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 + x - 3y - 4}{(x+3)^2 + (y-2)^2} \\ Im(Z) = \dfrac{x + 5y - 7}{(x+3)^2 + (y-2)^2} \end{cases}$

b) *En déduire l'ensemble* $\mathcal{C}$ *des points* $M(z)$ *tels que* Z *est imaginaire.*

c) *Vérifier que l'ensemble* $\mathcal{C}$ *est le cercle circonscrit au triangle* ABC *privé d'un point.*

3) *Montrer que l'ensemble des points* $M(z)$ *tels que* $Z \in \mathbb{R}$ *est la droite* (AC) *privée d'un point.*

Exercice 4 (5 points)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ *est rapporté à un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$

On considère les points A, B, C *et* D *d'affixes respectives :*

$z_A = 1 + i$, $z_B = 2 - \sqrt{3} + i$ *et* $z_C = 2$ *et* $z_D = \sqrt{3} - i$.

1) a) *Donner la forme exponentielle de* z_D.

b) *Montrer que* $OBCD$ *est un parallèlogramme.*

2) *Donner la forme exponentielle de* z_A *et puis la forme algébrique de* $\dfrac{z_B}{z_A}$.

3) a) *Montrer que* $\dfrac{z_B}{z_A} = \left(\sqrt{3} - 1\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) *En déduire la forme exponentielle de* z_B.

c) *Donner alors* $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Correction du devoir de contrôle n°1

Exercice 1

1) $\boxed{a}$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x) = +\infty$

2) $\boxed{b}$ Si f est une fonction continue sur $]-1,1[$ et g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors gof est continue sur $]-1,1[$.

3) $\boxed{b}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{1-\cos X}{X^2} = \dfrac{1}{2}$.

4) $\boxed{a}$ Pour tout entier naturel n, $\left(\sqrt{3}+i\right)^{12n} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{12n} = 2^{12n}\left(e^{i\frac{12\pi}{6}}\right)^{n} = 2^{12n}\times 1^n = 2^{12n}$.

Exercice 2

1) $-1 \le \sin(\pi x) \le 1 \Leftrightarrow -3 \le -3\sin(\pi x) \le 3 \Leftrightarrow x-3 \le x-3\sin(\pi x) \le x+3$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} \le \frac{x-3\sin(\pi x)}{x-1} = f(x) \le \frac{x-3}{x-1} \quad (\text{car } x-1<0)$$

2) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \le -1 \text{ on a : } \dfrac{x+3}{x-1} \le f(x) \le \dfrac{x-3}{x-1} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-3}{x-1} = 1 \end{array}\right. \xRightarrow{\text{D'après le théorème des gendarmes}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = 0$$

3) f est continue sur $]-\infty,-1]$ (operations sur des fonctions continue)

donc f est continue à gauche en -1.

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{x+2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = \lim_{x\to-1^+} \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} = \frac{1}{2} = f(-1)$$

Donc f est continue à droite en -1.

f continue à gauche et à droite en $-1 \Rightarrow f$ continue en -1.

4) f est continue sur l'intervalle $]-\infty,-1]$, donc en particulier f est continue sir chacun des intervalles $[-3,-2.5]$ et $[-2.5,-2]$.

En plus on a : $f(-3)\times f(-2.5) = \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{7}\right) < 0$ et $f(-2.5)\times f(-2) = \left(-\dfrac{1}{7}\right)\times\dfrac{2}{3} < 0$

Donc il existe deux réel α et β tels que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ et $-3 < \alpha < -2.5 < \beta < -2$.

Exercice 3

1) $A(a = 2 + i)$, $B(b = -1 - i)$, $C(c = -3 + 2i)$

a) $w = \dfrac{b-a}{b-c} = \dfrac{-3-2i}{2-3i} = \dfrac{(-3-2i)(2+3i)}{13} = \dfrac{-13i}{13} = -i.$

b) $|w| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|b-a|}{|b-c|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AB}{CB} = 1 \Leftrightarrow BA = BC$ en plus $w = \dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}$ imaginaire

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$ donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

2) a) $Re\left(Z\right) = \dfrac{x^2 + y^2 + x - 3y - 4}{(x+3)^2 + (y-2)^2}$ et $Im\left(Z\right) = \dfrac{x + 5y - 7}{(x+3)^2 + (y-2)^2}$ (faites le calcul)

b) $M(z) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow Re\left(Z\right) = 0$ et $z \neq c \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 3y - 4 = 0$ et $(x, y) \neq (-3, 2)$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 4 = 0$ et $(x, y) \neq (-3, 2)$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{26}}{2}\right)^2$ et $(x, y) \neq (-3, 2)$

Donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ privé du point C.

c) Les cordonnées de chacun des points A, B et C vérifient l'équation du cercle $\mathscr{C}$

Donc $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im\left(Z\right) = 0$ et $(x, y) \neq (-3, 2) \Leftrightarrow x + 5y - 7 = 0$ et $(x, y) \neq (-3, 2)$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$ est la droite $D : x + 5y - 7 = 0$

privés du point C et puisque $A(2, 1) \in D$ alors $D = (AC)$

Exercice 4

1) a) $|z_D| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \Rightarrow z_D = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$

b) $Aff(\overrightarrow{OC}) = 2 = (2 - \sqrt{3} + i) + (\sqrt{3} - i) = Aff(\overrightarrow{OB}) + Aff(\overrightarrow{OD}) = Aff(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$

Donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ en plus $Aff(\overrightarrow{OD}) / Aff(\overrightarrow{OC}) = (\sqrt{3} - i)/2 \notin \mathbb{R}$ donc les points O, C et D ne sont pas alignés ce qui prouve que $OBCD$ est un parallèlogramme.

2) $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{2 - \sqrt{3} + i}{1 + i} = \dfrac{\left(2 - \sqrt{3} + i\right)\left(1 - i\right)}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{3} + i - 2i + i\sqrt{3} + 1}{2}$

$= \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}i.$

3) a) $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2} + \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}i = \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \left(\sqrt{3} - 1\right)e^{i\frac{\pi}{6}}.$

b) $\dfrac{z_B}{z_A} = \left(\sqrt{3} - 1\right)e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z_B = \left(\sqrt{3} - 1\right)e^{i\frac{\pi}{6}}.z_A = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)e^{i\frac{\pi}{6}}.e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}.$

$$c)\ z_B = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}} = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = 2-\sqrt{3}+i$$

$$Donc\ \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}\ et\ \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$