L.Kesra +L.C.Kesra

$4^{éme}$

Durée : 2 heures

Devoir de Contrôle n°1

Mathématiques

2016 / 2017

Prof: B.Tmim
B.Allala

Exercice n°1 : (3 Pts)

Répondre par « vrai » ou « faux » en justifiant la réponse.

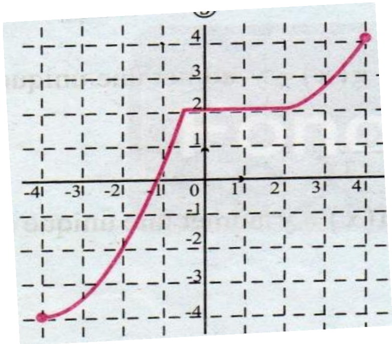
1) Soit $U_n = \frac{2}{5} + (\frac{2}{5})^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + (\frac{2}{5})^n$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2}{5}$.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit les points du plan complexe M(z) et M'(z') tels que

$\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg(z')\ [2\pi]$, alors $(OM) \perp (OM')$.

3) L'équation $f(x) = k$ admet une solution unique pour tout réel ~~k de l'intervalle $[-4, 4]$~~ (la courbe ci-contre est celle de f)



Exercice n°2 : (5,5 Pts)

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & si\ \ x < -1 \\ 4x^3 + 6x^2 - 1 & si\ \ -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1-\cos(\pi x)}{x} - 1 & si\ \ x > 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $-1 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} - 1$.

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

2) Etudier la continuité de f en 0.

3) Soit la fonction g restriction de f sur $[-1, 0]$.

a) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $]-1,0[$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-1, 0[$

c) Montrer que : $\alpha = \frac{1}{2\alpha(2\alpha+3)}$.

Exercice n°3 : (5,5 Pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$,

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1) a) Donner la forme exponentielle de z_B et z_C .

b) Placer les points A , B et C, puis déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.

c) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $|z| = |z - 2|$.

2) A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{-4}{z-2}$.

a) Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de z' pour $z = 2i$.

b) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2 , $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

c) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de (E). Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (Γ).

Exercice n°4 : (6 Pts)

Soit la suite réelle (U) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{3-U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 < U_n < 2$.

b) Montrer que la suite (U) décroissnate.

c) En déduire que la suite (U) est convergente et calculer sa limite ℓ .

2) Soit la suite (V) définie sur IN par : $V_n = \frac{-2+U_n}{U_n}$

a) Montrer que (V) et une suite géométrique de raison 3.

b) Exprimer V_n en fonction de n et retrouver $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3) a) Calculer en fonction de n , $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$

b) En déduire $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k} = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \cdots + \frac{1}{U_n}$ en fonction n.

Bon travail