Lycée : Feriana

Hamdi-M abrouk

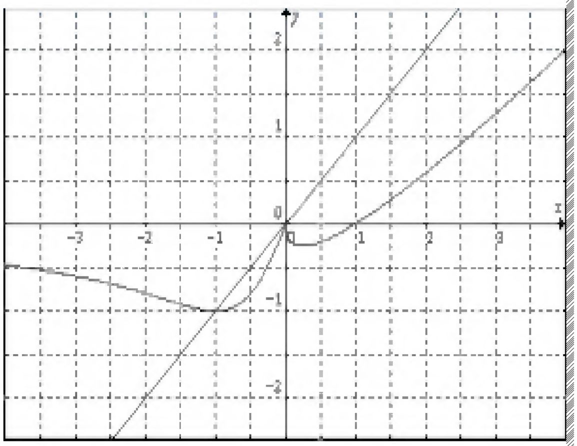
27-10-2016

Devoir de contrôle N°1

Mathématiques

$4^{ème}$ *SC Exp* 1
Durée : 2heures

Exercice 1



La courbe(C_f) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR.(C_f) Admet en $-\infty$ une asymptote d'équation y=0 et une branche parabolique de direction la droite y = x au voisinage de $+\infty$

1) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x$.

b) Etudier la position de (C_f) par rapport à Δ $y = x$.

2) a) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

b) Déterminer $f(IR)$ et $f(]-\infty, 0])$

3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a) Déterminer l'ensemble des définitions de g.

b) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = \frac{1}{n}$ où n est un entier naturel non nul.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 3\cos x + \pi x - 1$

1) a) Montrer que pour tout réel x , on a : $\pi x - 4 \leq f(x) \leq \pi x + 2$.

b) Calculer limite de f en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$.

c) $\lim_{x\to+\infty} f(\sqrt{x})$ et $\lim_{x\to-\infty} f(\frac{2-\pi x^3}{2x^3+1})$

2) a) Montrer que l'équation (E) : $3\cos x = -\pi x + 1$ admet dans IR une unique solution $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right[$

b) Montrer que $\cos\alpha = \frac{1-\pi\alpha}{3}$ et $\tan\alpha = \frac{-\sqrt{9-(\pi\alpha-1)^2}}{1-\pi\alpha}$

3) donner le signe de f sur IR.

4) Montrer que la fonction h définie sur IR^*par $h(x) = \frac{-2+f(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement g.

Exercice 3

On considère le nombre complexe $\mathbf{a}$ tel que $\mathbf{a} = 2+\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1) a) Montrer que $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
   b) Vérifier que $\mathbf{a} = 2(1+\cos\frac{\pi}{4}) + 2i\sin\frac{\pi}{4}$.
2) a) Montrer que $\mathbf{a} = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$.
   (on donne $\sin 2x = 2\cos x.\sin x$ et $\cos 2x = -1 + 2\cos^2 x$)
   b) En déduire la forme trigonométrique de $\mathbf{a}$.
   c) Donner la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$

Exercice 4

Dans l'annexe ci-jointe $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et (C) le cercle de centre B, d'affixe $z_B = -1$ et de rayon 2.Les points $A(a)$, $P(p)$, $P'(p')$ et $Q(q)$ d'affixes respectives

$a = 1$, $p = -2 + i\sqrt{3}$, $p' = \frac{p-1}{p+1}$ et $q = -\bar{p}$ avec $p \neq -1$.

1) a)Déterminer la forme trigonométrique de $(p+1)$.

   b) Montrer que le point P appartient au cercle (C).

2) a) Montrer que $(p'-1)(p+1) = -2$

   b) En déduire que si P appartient au cercle (C) P' appartient à un cercle que l'on déterminera et le construire dans l'annexe.

   c) Vérifier que $P' \neq Q$.

3)a) Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.

   b) En utilisant les questions précédente, placer le point Q et construire le point P'.

Bonne Chance

Nom & prénom :..

ANNEXE A RENDRE