

Lycée El Amel Fouchana		Devoir de contrôle n°1	
Prof : B. Zouhaier	4 ème	Novembre 2016	Durée : 2 heures

Exercice n°1(4points) : les parties I, II et III sont indépendantes

I/ Démontrer les identités suivantes :

- $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout réel θ
- Pour tout nombre complexe $Z : Z\bar{Z} = |Z|^2$
- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

II/Répondre par **Vrai** ou **Faux**, en justifiant la réponse

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{2 - 3^n} = 1$
- Si f et g sont deux fonctions définies sur \mathbb{R} telles que $f(1) = 2$ et $g(2) = 3$ alors $\lim_{x \rightarrow 1} g \circ f(x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1} = 3$

III/Recopier et compléter les phrases suivantes par ce qui convient

- Toute suite convergente est
- $Arg(Z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$ si et seulement si

Exercice n°2(6points) :

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_{n+1}}{U_{n+2}} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq U_n \leq 1$
- Montrer que la suite (U_n) est croissante.
- a) Montre que pour tout entier naturel n on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |U_n - 1|$
b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
c) Déterminer alors la limite de la suite (U_n) .
- Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{1 - U_n}{1 + U_n}$
a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$
b) Exprimer (V_n) et puis (U_n) en fonction de n .
c) Retrouver la limite de (U_n)
- Soit $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ pour tout $n \geq 0$
Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice n°3(5points) :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère les points A, B, E et F d'affixes respectives $1, \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{5}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ et 2

On note (\mathcal{C}) le cercle de centre A et de rayon 1.

- Vérifier que $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_E = 1 + z_B^2$
- a) Montrer que $B \in (\mathcal{C})$.
b) Montrer que le triangle ABF est équilatéral
c) Placer les points A, B et F

3. a) Ecrire z_B sous forme exponentielle
- b) Montrer que les points A,B et E sont alignés.
- c) Calculer la distance AE puis construire le point E
4. Montrer que les triangles AEF et OAE ont même aire

Exercice n°4(5points) :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x - \sqrt{x^2 + x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j})

1. a) Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $-1 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 1$
- b) En déduire que f est continue en 0
- c) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)$
- d) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{x^3}{x^2 + 1}\right)$
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $] -3; -2[$
4. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) Montrer que la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (\mathcal{C}) au voisinage de $+\infty$

