Lycée Takelsa Prof : Mourad Ziadi	Devoir de Contrôle N :1 Mathématiques	
Date : 04/11/2014	Durée :2h	Classe :4ème

Exercice № 01(03pts)

Répondre par « Vrai » ou « Faux », en justifiant la réponse.

1) La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n+1} + (-1)^n$ est convergente.
2) $\dfrac{13\pi}{12}$ est un argument du nombre complexe $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$
3) Soit θ un réel. L'ensemble des points M d'affixe $z = 1 - 3i + e^{2i\theta}$ est le cercle de centre le point J d'affixe $-1 + 3i$ et de rayon 1.
4) Dans le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives non nulles z_A et z_B telle que $z_B = iz_A$.
   Le triangle OAB est alors rectangle isocèle en O

Exercice № 02(06pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm).
On considère les points A ; B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_C = 2$.
Soit ξ le cercle de centre C et de rayon 2.

1) a) Vérifier que B $\in \xi$.

   b) Placer les points A et C. Construire alors le point B.

2) a) Ecrire z_A sous forme exponentielle.

   b) Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

   c) Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   d) En déduire la forme exponentielle de z_B.

   e) Déterminer alors la valeur exacte de $sin\,(\frac{\pi}{12})$.

3) Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tel que : $|z| = |\overline{z} - 1 - i|$.
4) Pour tout point M du plan d'affixe $z \neq 2$ on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -3i(\frac{z-1+i}{z-2})$.
   a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' soit réel .

   b) Montrer que OM'$= 3\frac{AM}{CM}$.

   c) En déduire que lorsque M décrit la médiatrice de $[AC]$; le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

Exercice № 03(05pts)

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+2} & si\, x\geq 0\\[2mm] \dfrac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1}-1)} & si\, x\prec 0\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0

2) a)Montrer que pour tout réel positif x on a : $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+2}\leq f(x)\leq\dfrac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

b) En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$

3) Déterminer, <u>en justifiant la réponse</u>, les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(1-\sin x)$

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ une solution qu'on notera α

b) Montrer que $\tan(\alpha)=-\sqrt{\alpha-1}$ (Indication : On rappelle que $\mathbf{1+tan^2x=\frac{1}{cos^2x}}$)

Exercice № 04(06pts)

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0=1$, $b_0=7$ et pour tout entier naturel n

on a : $a_{n+1}=\frac{2a_n+b_n}{3}$ et $b_{n+1}=\frac{a_n+2b_n}{3}$. On pose $u_n=b_n-a_n$.

1)a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer, alors u_n en fonction de n . En déduire la limite de (u_n).

2) Soit $S_n=\sum_{k=0}^{n}(b_k-a_k)$.

a) Montrer que $S_n=9[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}]$.

b) En déduire la limite de S_n .

3) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $a_n\leq b_n$.

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.

4) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5) Soit (v_n) la suite définie par $v_n=a_n+b_n$ pour tout n $\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite constante.

b) Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite commune.

BON TRAVAIL