LYCEE SBEITLA

DEVOIR DE CONTROLE N°1

PROF – BELLILI MONGI

DATE : 10 / 11 / 2015, Durée : 2h

4ème Sc. exp.

EXERCICE N°1 (03 pts) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

1°) Le nombre complexe : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ est une racine quatrième de :

a/ l'unité b/ i c/ $-i$

2°) Soit z un nombre complexe non nul d'argument α . Alors un argument de $\frac{z^3}{\bar{z}}$ est :

a/ 2α b/ 4α c/ $\alpha^3+\alpha$

3°) Soient A et B deux points d'affixes respectives 3 et 3i .

Alors l'ensemble des points M(z) tel que : $\frac{z-3i}{z-3}$ soit imaginaire pur est :

a/ la droite (AB) privée des points A et B

b/ Le segment [AB] privé des points A et B

c/ Le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B

4°) On considère les nombres complexes : $a=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ et $b=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ avec $n\in\mathbb{Z}$

a/ $a-b=0$ b/ $(a-b)\in\mathbb{R}$ c/ $(a-b)\in i\mathbb{R}$

EXERCICE N°2 (04 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=-4x^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2x}\right)+x+1 & \text{si } x<0 \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-2x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

1°) a- Montrer que pour tout $x<0$ on a : $-4x^2+x+1\leq f(x)\leq x+1$

b- Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

2°) Etudier la continuité de f en 0

3°) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4°) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in[0,1]$.

EXERCICE N°3 (05 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur IN par: $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 2}{U_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

1°) a- Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 2$.

b- Montrer que la suite (U_n) est décroissante .

c- Déduire que la suite (U_n) converge puis calculer sa limite l .

2°) a- Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(U_n - 2)$

b- Déduire que pour tout entier n on a : $U_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c- Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE N°4 (08 pts) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

I/ 1°) a- Calculer : $\left(\sqrt{3} + 2i\right)^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}.z + 4 - i4\sqrt{3} = 0$

2°) On considère le point A d'affixe: $a = 2\sqrt{3} + 2i$

a – Mettre sous forme exponentielle a .

b- Placer le point A

3°) On considère le nombre complexe : $u = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

a- Calculer u^2

b- Déduire la forme exponentielle de u

c- Déterminer les valeurs de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

II/ Soient I le point d'affixe 1

A tout point M d'affixe z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que: $z' = \dfrac{z}{\bar{z}}$

1°) Montrer que : $z'.\overline{z'} = 1$ puis interpréter géométriquement le résultat.

2°) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux

3°) Construire alors le point M' , image d'un point M distinct de O donné.