

Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°1

Classe : 4^{ème}

Professeur

Dhaouadi
Nejib

Novembre 2015

Exercice 1

Une seule des trois propositions suivantes est exacte, le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ n'existe pas

2) Si z est un nombre complexe non nul d'argument θ alors un argument de $\frac{\bar{z}}{\sqrt{3} - i}$ est :

a) $\frac{\pi}{6} - \theta$

b) $-\frac{\pi}{6} - \theta$

c) $\frac{\pi}{6} + \theta$

3) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ alors :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x) = -\infty$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |u_n - 1|$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Retrouver alors la limite de la suite (u_n) .

4) Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par : $v_n = \frac{1 - u_n}{1 + u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) Exprimer v_n et puis u_n en fonction de n .

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère les points A, B, E et F d'affixes respectives $1, 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}, 1 + z_B^2$ et 2

On note \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 1 .

1) a) Vérifier que $B \in \mathcal{C}$.

b) Déterminer un argument de $\frac{z_B - z_A}{z_F - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABF .

2) a) Montrer que pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$, $1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) Déterminer alors la forme exponentielle de z_B .

c) Montrer que les points A, B et E sont alignés.

3) Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et $1 + z^2$.

Montrer que $\frac{z^2}{z - 1}$ est réel si et seulement si A, M et M' sont alignés.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x + \sin x - 1$.

1) a) Montrer que pour tout réel x , on a : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x$.

En déduire les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$.

2) a) Montrer que l'équation (E) : $3x = 1 - \sin x$ admet, dans \mathbb{R} , une solution unique

$$\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[.$$

b) Donner le signe de f sur \mathbb{R} .

3) Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par : $g(x) = \frac{1 + f(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et définir son prolongement h .

Exercice 1

1) Reponse a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2) Reponse a) $\frac{\pi}{6} - \theta$

$$|\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \Rightarrow z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \left[2, -\frac{\pi}{6} \right]$$

$$\arg\left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{3} - i}\right) \equiv \arg(\bar{z}) - \arg(\sqrt{3} - i) \quad [2\pi]$$

$$\equiv -\theta - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \equiv \frac{\pi}{6} - \theta \quad [2\pi]$$

3) Réponse b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x) = 0$

$$g(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Théorème: Limite de la composée} \\ \hline \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x) = 0 \end{array}$$

Exercice 2

(u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

1) Initialisation : Pour $n = 0$ on a $u_0 = 0 \in [0, 1]$ vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

$$\text{On a : } u_{n+1} = \frac{2(u_n + 2) - 3}{u_n + 2} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}.$$

$$0 \leq u_n \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq u_n + 2 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{u_n + 2} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{3}{u_n + 2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \text{ d'où l'hérédité.}$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

$$2) a) u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n + 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2} \geq 0$$

Car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$ donc la suite (u_n) est croissante.

LYCEE DE SBEITLA

b) (u_n) est croissante et majorée (par 1) donc elle est convergente. Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in [0,1] \Rightarrow f(l) = l \\ f \text{ est continue sur } [0,1] \subset \mathbb{R} \setminus \{-2\} \end{array} \right.$$

$$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{2l+1}{l+2} = l \Leftrightarrow 2l+1 = l^2 + 2l \Leftrightarrow l^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow l = -1 \text{ (à rejeter) ou } l = 1.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

$$3) a) |u_{n+1} - 1| = \left| \frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2} \right| = \left| \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \right| = \frac{|u_n - 1|}{u_n + 2}$$

$$0 \leq u_n \Leftrightarrow 2 \leq u_n + 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|u_n - 1|}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2} |u_n - 1| \text{ d'où } |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |u_n - 1|.$$

b) Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $|u_0 - 1| = 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ ce qui est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |u_n - 1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow |u_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ d'où l'hérédité.}$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n on a : $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$c) \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1, 1[\end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((u_n - 1) + 1) = 1 \\ c - \text{à} - d \text{ la suite } (u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \end{array} \right.$$

$$4) a) v_{n+1} = \frac{1 - u_{n+1}}{1 + u_{n+1}} = \frac{1 - \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{1 + \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{u_n + 2 + 2u_n + 1} = \frac{1 - u_n}{3(u_n + 1)} = \frac{1}{3} v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1 - u_0}{1 + u_0} = 1$.

$$b) v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et } v_n = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \Leftrightarrow v_n + u_n v_n = 1 - u_n \Leftrightarrow u_n (v_n + 1) = 1 - v_n$$

$$\text{Alors } u_n = \frac{1 - v_n}{1 + v_n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \text{ ou encore } \boxed{u_n = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}}$$

Exercice 3

$$1) a) AB = |z_B - z_A| = \left| e^{\frac{i\pi}{3}} \right| = 1 \Rightarrow B \in \mathcal{C}.$$

$$b) \frac{z_B - z_A}{z_F - z_A} = e^{\frac{i\pi}{3}} \Rightarrow \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_F - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi].$$

Dans le triangle ABF on a :

$$\begin{cases} AF = |z_F - z_A| = |2 - 1| = 1 = AB \\ \widehat{(AF, AB)} \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_F - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases} \Rightarrow AFB \text{ est équilatéral.}$$

$$2) a) 1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right) = e^{\frac{i\theta}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

$$b) \text{ Pour } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ on a } z_B = 1 + e^{\frac{i\pi}{3}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3} e^{\frac{i\pi}{6}} \text{ c'est la forme exponentielle de } z_B.$$

$$\begin{aligned} c) \widehat{(AB, AE)} &\equiv \arg(z_E - z_A) - \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi] \\ &\equiv \arg(z_B^2) - \arg\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) \equiv 2 \arg(z_B) - \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \equiv 0 \quad [2\pi] \Rightarrow A, B \text{ et } E \text{ sont alignés.} \end{aligned}$$

$$\text{Ou encore } \frac{\text{Aff}(\overrightarrow{AE})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AB})} = \frac{z_B^2}{z_B - z_A} = \frac{3e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{3}}} = 3 \in \mathbb{R} \Rightarrow A, B \text{ et } E \text{ sont alignés.}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{z^2}{z-1} &= \frac{z^2 + 1 - 1}{z-1} = \frac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A} = \frac{\text{Aff}(\overrightarrow{AM'})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AM})} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow A, M \text{ et } M' \text{ alignés.} \end{aligned}$$

Exercice 4

$$1) a) \text{ Pour tout réel } x, -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 3x + \sin x \leq 3x + 1 \Leftrightarrow 3x - 2 \leq f(x) \leq 3x.$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 3x - 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 3x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$b) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases} \xrightarrow{\text{Limite de la composée de deux fonctions}} \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Limite de la composée de deux fonctions}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) = -1.$$

2) a) $3x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 3x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

La fonction f est continue sur \mathbb{R} et en plus $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1-\pi}{2} < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$.

f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 + \cos x \geq 2 > 0$ car $\cos x \geq -1$.

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} d'où α est l'unique solution, dans \mathbb{R} , de l'équation $f(x) = 0$ ou encore de l'équation $3x = 1 - \sin x$.

b)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + \frac{\sin x}{x}\right) = 4$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

g admet une limite finie en 0 donc g est prolongeable par continuité en 0 et son

prolongement h est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = 3 + \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 4$.