

<i>L-S-ROGBA</i>	<b><i>Devoir de contrôle n°1</i></b> <i>***Mathématiques***</i>	<i>Classe : 4<sup>ème</sup></i>
<i>A-S :2014/2015</i>	<i>Prof : MBAREK Kamel</i>	<i>Durée : 2 Heures</i>

### **EXERCICE 1 : (8 Pts)**

1/ On considère l'équation (E):  $z^2 - (3 + \sqrt{3})z + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - i) = 0$ .

a) Vérifier que :  $(1 + \sqrt{3} + 2i)^2 = 2\sqrt{3} + 4i(1 + \sqrt{3})$ .

b) Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E).

2/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points A, B et  $\Omega$  d'affixes respectives  $z_A = 1 - i$ ;  $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$  et  $z_\Omega = 2$ . Soit  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon 2.

a) Vérifier que B appartient à  $(\mathcal{C})$ .

b) Placer les points A et  $\Omega$ . Construire le point B.

3/a) Ecrire  $z_A$  sous forme exponentielle.

b) Ecrire  $\frac{z_B}{z_A}$  sous forme algébrique et montrer que  $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

c) En déduire la forme exponentielle de  $z_B$ .

d) Déterminer alors la valeur exacte de  $\sin(\frac{\pi}{12})$ .

### **EXERCICE 2 : (7 Pts)**

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} 1 + x \cos(\pi x) + x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1/ Montrer que f est continue en 0.

2/a) montrer que pour tout  $x < 0$  on a:  $1 + x + x^2 \leq f(x) \leq 1 - x + x^2$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ; interpréter graphiquement le résultat.

3/a) Montrer que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{-4}{(\sqrt{x^2+4})^3}$ .

b) Dresser le tableau des variations de f sur  $[0, +\infty[$ .

4/ Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[0,1]$ .

5/a) Montrer que  $\forall x \in [0, +\infty[$  on a:  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

b) En déduire que  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ .

### EXERCICE 3 : (5 Pts)

La courbe  $(\mathcal{C}_f)$  ci-dessous représente dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

La droite  $\Delta: y = x + 1$  est une asymptote à  $(\mathcal{C}_f)$  au  $V_{+\infty}$ , la droite  $\Delta': y = 2$  est une asymptote horizontale à  $(\mathcal{C}_f)$  au  $V_{-\infty}$  et l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à  $(\mathcal{C}_f)$ .

1/ Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{f(x) - 2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{f(x) - 1}{x + 3}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + 1}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x + 1 - f(x))$ .

2/ Déterminer  $f'_d(2)$  et  $f'(1)$ .

3/ Donner le tableau des variations de  $f$ .

4/ Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = f(2 + f(x))$ .

a) Déterminer l'ensemble de définition de  $g$ .

b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  et  $g'(1)$ .

