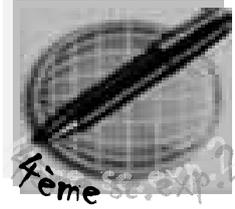




## DEVOIR DE CONTROLE N°1

PROF - BELLILI MONGI

DATE : 09 / 11 / 2015, Durée : 2h



### EXERCICE N°1 (03 pts)

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la réponse exacte.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1°) Soit  $z$  un nombre complexe non nul d'argument  $\alpha$ . Alors un argument de  $\bar{z}.z^3$  est :

a/  $2\alpha$

b/  $-\alpha^4$

c/  $\alpha^3 - \alpha$

2°) L'ensemble des points  $M(z)$  tel que :  $(z-i)(\bar{z}+i) = 2$  est :

a/ Une droite

b/ Un point

c/ Un cercle

3°) soit  $z$  un nombre complexe de module 3. Alors le conjugué de  $z$  est :

a/  $\frac{9}{z}$

b/  $\frac{3}{z}$

c/  $\frac{1}{z}$

4°) La limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de :  $\frac{1-2^n}{1+\sqrt{3}^n}$  est égale à :

a/  $-1$

b/  $\frac{-2}{\sqrt{3}}$

c/  $-\infty$

### EXERCICE N°2 (05 pts)

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - \sin 2x}{x} & ; \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} - x & ; \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1°) a- Montrer que pour tout  $x < 0$  on a :  $\frac{3x+1}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x-1}{x}$  puis déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b- Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$

2°) Etudier la continuité de  $f$  en 0 puis justifier  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

3°) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4°) Montrer que l'équation :  $f(x) = \frac{1}{2}$  admet au moins une solution  $\alpha \in [0, 1]$

**EXERCICE N°3** (05 pts)

Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par:  $U_0 = 4$  et  $U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1°) a- Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $U_n \geq 3$ .
- b- Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante .
- c- Dédurre que la suite  $(U_n)$  converge puis calculer sa limite 1 .
- 2°) a- Montrer que pour tout entier  $n$  on a :  $U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(U_n - 3)$
- b- Dédurre que pour tout entier  $n$  on a :  $U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$
- c- Dédurre  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

**EXERCICE N°4** (07 pts) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ 

I/ 1°) a- Calculer :  $(2+i)^2$

b- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $iz^2 + 2i\sqrt{2}z + 8i - 8 = 0$

2°) On considère le point A :  $z_A = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

a – Mettre sous forme exponentielle  $z_A$

b- Placer le point A

3°) On considère le nombre complexe :  $a = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

a- Mettre  $a^2$  puis  $a$  sous forme exponentielle

b- Déterminer les valeurs de :  $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

4°) On considère le nombre complexe :  $b = 4 + z_A$ . Déterminer le module et un argument de  $b$

III/ Soient les points I , J et K d'affixes respectives 1 , i et - 1.

A tout point M d'affixe  $z \neq i$ , on associe le point M' d'affixe  $z'$  tel que:  $z' = \frac{z-i}{z+i}$

1°) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{KM'}$  et  $\overrightarrow{JM}$  sont colinéaires

2°) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{IM'}$  et  $\overrightarrow{JM}$  sont orthogonaux

3°) Construire alors le point M' image d'un point M donné distinct de J