Lycée Houmet Souk 1	Devoir de Contrôle N : 1	4 ème
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	15 - 11 - 2013

EXERCICE N : 1 (4.5 points)

Sans justification , déterminer la seule réponse correcte de chacune des propositions suivantes :

1) Si $\lim_{x\to+\infty} [\frac{f(x)}{x}] = 1$ alors la courbe représentative de f dans un repère orthogonal admet :

a) Une asymptote oblique **b)** Une branche parabolique **c)** on ne peut pas conclure

2) Soit la fonction g définie par : $g(x) = 1 - x^3$ alors

a) $g(]1,2[) = [-7,0[$ **b)** $g([1,+\infty[) =]-\infty,0[$ **c)** $g([0,1]) = [0,1]$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} =$

a) $\frac{1}{2}$ **b)** 0 **c)** n'existe pas

4) Si h est une fonction continue sur [0, 1] , h (0) = 2 et h (1) = 4 alors l'équation h (x) = 0 admet dans [0, 1] :

a) au moins une solution **b)** aucune solution **c)** on ne peut pas conclure

5) Soit la suite (S_n) définie IN* par : $S_n = \frac{2}{n^2+1} + \frac{4}{n^2+1} + \frac{6}{n^2+1} + \dots + \frac{2n}{n^2+1}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} S_n =$

a) 1 **b)** 0 **c)** $+\infty$

6) Soit n un entier naturel. Le nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$ est égal à :

a) $2\cos(\frac{n\pi}{3})$ **b)** $2^{n+1}\cos(\frac{n\pi}{3})$ **c)** $2^{n+1}\cos(\frac{n\pi}{6})$

EXERCICE N : 2 (5 points)

1) a) Calculer $(1 + 3i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - (1-i)Z + 2(1-i) = 0$.

2) Soit , dans $\mathbb{C}$, l'équation : **(E)** $Z^3 - 2(1-i)Z^2 + 2(1-2i)Z + 4i = 0$

a) Vérifier que (1 - i) est une solution de **(E)** :

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)** .

3) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points A , B et C d'affixes respective $Z_A = -2i$, $Z_B = 1 - i$ et $Z_C = 1 + i$.

a) Montrer que OABC est un parallélogramme .

b) Calculer $\frac{Z_B - Z_A}{Z_B}$ puis déduire la nature du triangle OAB .

c) Déterminer l'aire du parallélogramme OABC .

EXERCICE N : 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $R\,(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\,)$. **(Unité : 2 cm)**
On pose $Z_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = (1+i)\,Z_n$.

On note M_n le point du plan d'affixe Z_n .

1) a) Calculer Z_1 , Z_2 , Z_3 et Z_4 .
b) Placer les points M_0, M_1 , M_2, M_3 et M_4 sur une figure .

2) a) Etablir que pour tout entier naturel n on a : $Z_{n+1} - Z_n = i\,Z_n$.
b) En déduire que $M_n M_{n+1} = OM_n$.

3) Pour tout entier naturel n , on pose : $U_n = |Z_n|$.
a) Montrer que la suite (U_n) est géométrique .

b) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $U_n = (\sqrt{2})^n$.

4) Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \ldots + M_{n-1}M_n$.
a) Montrer que pout tout entier naturel n on a : $L_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}$.

b) Exprimer L_n en fonction de n .

c) Déduire, en cm , la longueur de la ligne brisée $M_0M_1M_2M_3M_4$.

EXERCICE N : 4 (5.5 points)

On considère la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - 1 = \dfrac{-1}{(U_n+\sqrt{1+U_n^2})\sqrt{1+U_n^2}}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n ; $0 < U_n \leq 1$

c) Montrer que la suite (U_n) est décroissante .

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite .

2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur IN par : $V_n = \left(\dfrac{1}{U_n}\right)^2$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1 .

b) Exprimer V_n en fonction de n .

c) Déduire que pour tout $n \in IN$, $U_n = \sqrt{\dfrac{1}{1+n}}$ et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Pour tout $n \in IN$, On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$. Montrer que $\sqrt{n+1} \leq S_n$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.