

Exercice n°1: (3pts)

Pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer la quelle.

1) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ est :

- a) $-\frac{\pi}{3} + \theta$ b) $\frac{2\pi}{3} + \theta$ c) $\frac{2\pi}{3} - \theta$

2) L'ensemble des points $M(z)$ tel que $z = 2i + e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel est :

- a) une droite
b) un cercle de centre $A(2i)$ et de rayon 1
c) un cercle de centre $A(-2i)$ et de rayon 1

3) L'ensemble des points $M(z)$ tel que $\bar{z} = \frac{1}{z}$ est :

- a) L'axe des ordonnées
b) Le cercle trigonométrique
c) L'axe réel.

Exercice n°2: (5pts)

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) et on considère le cercle (C) de centre A d'affixe 1 et de rayon 1.

F, B et E les points d'affixes respectives $z_F = 2$; $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_E = 1 + z_B^2$

1) a) Montrer que B appartient à (C).

b) Déterminer un argument de $\frac{z_B - z_A}{z_F - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABF.

2) a) Montrer que pour tout $]\theta, \pi[$, $1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

- b) Déterminer alors la forme exponentielle de z_B
c) Montrer que A, B et E sont alignés.

3) Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et $1 + z^2$

Montrer que $\frac{z^2}{z-1}$ est réel si et seulement si A, M et M' alignés.

Exercice n°3: (6pts)

On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$

1) a) Vérifier que pour tout x non nul : $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}}$

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 0 et définir g.

2) a) Montrer que pour tout réel x , on a $\sqrt{1+x^2} + 1 \leq 2\sqrt{1+x^2}$

b) En déduire que : $f(x) \geq \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$

c) Montrer que pour tout réel non nul x on a : $f(x) \leq \frac{1}{1+|x|}$

3) Calculer alors les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 f(x)$

4) a) Montrer que f strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

b) Montrer que l'équation : $f(x) = \frac{2}{5}$ admet une solution unique dans $]1, 2[$.

Exercice n°4 : (6pts)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par : $u_0 = 2$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont minorées par 1 et majorées par 2.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$

b) Montrer alors par récurrence, que tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq v_n$.

c) Montrer que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante. En déduire qu'elles sont convergentes.

3) a) Montrer que si $1 \leq x \leq 2$ et $1 \leq y \leq 2$ alors $x - y \leq 1$ et $\frac{x - y}{2(x + y)} \leq \frac{1}{4}$

b) En déduire que : $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$

c) Montrer alors que : $u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) On donne : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$. Déterminer la limite de (v_n) .

Bon travail