Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°1

Classe : 4ème

Novembre 2013

Professeur

Dhaouadi

Nejib

Exercice 1 (4 pts)

Pour chaque question, une seule des propositions données est exacte. L'élève indique sur la feuille le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit n un entier relatif. Le nombre complexe $(1+i)^n$ est réel si et seulement si

a) $n = 4k$, avec $k \in \mathbb{Z}$ b) $n = 8k$, avec $k \in \mathbb{Z}$ c) $n = 4k+2$, avec $k \in \mathbb{Z}$

2) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{\overline{z}}{\sqrt{3}-i}$ est :

a) $\dfrac{\pi}{6}-\theta$ b) $\dfrac{\pi}{3}-\theta$ c) $\dfrac{\pi}{6}+\theta$

3) Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$. Si f est bornée alors :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$ c) On ne peut pas conclure

4) Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ est égale à :

a) -1 b) 1 c) n'existe pas

Exercice 2 (6,5 pts)

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \cos x$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une solution unique α et que $\alpha \in \left]0,\dfrac{\pi}{6}\right[$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x-\cos x}$.

a) Montrer que pour tout réel $x > \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2x-1}{2x+1} \le f(x) \le 1$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et dont la courbe représentative est donnée en annexe (voir page 3) telle que les droites d'équations $x = 1$, $y = -1$ et $y = 1$ sont des asymptotes à cette courbe.

Déterminer graphiquement : $\lim\limits_{x\to1} h(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

4) On pose $F = hof$

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Déterminer les limites éventuelles suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$

Exercice 3 (4,5 pts)

Le plan est muni d'un repèreorthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2i$, $b = -\sqrt{3}+i$ et $c = -\sqrt{3} - i$

1) Ecrire a, b et c sous forme exponentielle. Placer A, B et C sur une figure.

2) Soit $Z = \dfrac{a-b}{c-b}$.

a) Ecrire Z sous forme algébrique et puis exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 4 (5 pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et i

Pour tout point M(z) du plan $P\setminus\{B\}$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{z}{z-i}$

1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

a) Montrer que $\begin{cases} x' = \dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} \\ y' = \dfrac{x}{x^2+(y-1)^2} \end{cases}$

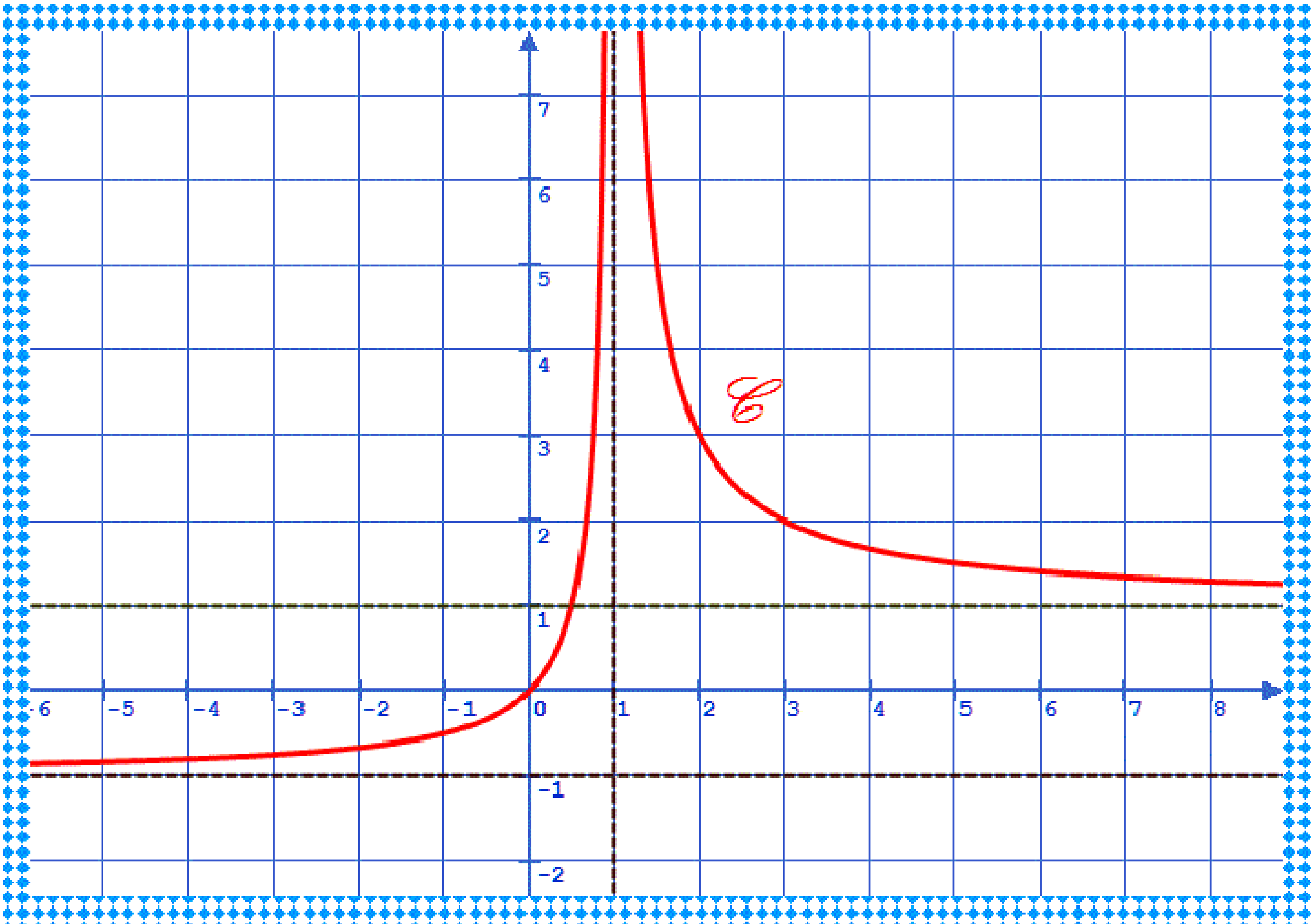
b) En déduire alors les ensembles suivants :

$E = \{M(z) \in P \ \text{ tq } \ z' \in \mathbb{R}\}$

$F = \{M(z) \in P \ \text{ tq } \ z' \ \text{ imaginaire}\}$

2) a) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$; vérifier que $z' - 1 = \dfrac{i}{z-i}$

b) En déduire que si le point M(z) varie sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 1 alors le point $M'(z')$ varie sur un cercle $\mathscr{C}'$ que l'on précisera.


7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
$\mathscr{C}$

Correction du devoir de contrôle n°1

Exercice 1

1) a) $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$

2) a) $\arg\left(\frac{\overline{z}}{\sqrt{3}-i}\right) \equiv \arg(\overline{z}) - \arg\left(\sqrt{3}-i\right) \equiv -\arg(z) - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \equiv -\theta + \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

3) b) f bornée sur $]0,+\infty[\ \Rightarrow$ il exite deux réelles m et M tq pour tout $x > 0,\ m \le f(x) \le M$

Donc pour tout $x > 0,\ \frac{m}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{M}{x}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{m}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{M}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

4) c)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x}{x}\sqrt{1+x^2} = \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{1+x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} x\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x}{-x}\sqrt{1+x^2} = \lim\limits_{x\to0^+} -\sqrt{1+x^2} = -1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) \ne \lim\limits_{x\to0^-} f(x) \Rightarrow$ f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 2

1) * **Existence**

La fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$ donc g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ comme somme de fonctions continues. En plus on a : $g(0)\times g\left(\frac{\pi}{6}\right) = (-1)\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\right) < 0$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{6}\right[$.

* **Unicité**

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2 + \sin x > 0 \quad (\text{car } -1 \le \sin x \Rightarrow 1 \le 2 + \sin x\ )$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et par suite α est l'unique solution réelle de l'équation $g(x) = 0$.

2) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad -1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\cos x \le 1 \Leftrightarrow 2x-1 \le 2x-\cos x \le 2x+1$

Pour tout $x > \frac{1}{2}$, $\quad 0 < 2x-1 \le 2x-\cos x \le 2x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2x-\cos x} \le \frac{1}{2x-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{2x+1} \le \frac{2x-1}{2x-\cos x} \le \frac{2x-1}{2x-1} \quad (\text{puisque } 2x-1 > 0)$$

Donc pour tout $x > \frac{1}{2}$, $\quad \frac{2x-1}{2x+1} \le f(x) \le 1$.

b)

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x > \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2x-1}{2x+1} \le f(x) \le 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

D'après le théorème des "gendarmes" pour les fonctions on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

3) $\lim\limits_{x\to1} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$.

4) On pose $F = h\circ f$

a) $F(x) = h\left(f(x)\right)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \alpha \\ f(x) \ne 1 \end{cases}$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2x-1 = 2x-\cos x \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Donc F est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\alpha, 2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}\}$.

b) Il n y a aucun intervalle de la forme $]a,+\infty[$ sur lequel f est définie (car tout intervalle de cette forme contient des réels de la forme $2k\pi$) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ n'existe pas.

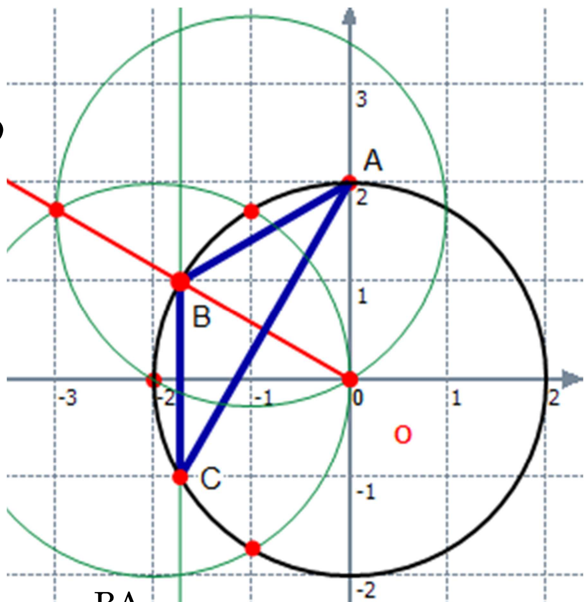
$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h\left(f(x)\right)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to0} h(x) = h(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} F(x) = 0$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0) = 1 \\ \lim\limits_{x\to1} h(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} F(x) = +\infty$$

Exercice 3

1) $a = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $b = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $c = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$



Construction :

$|a| = |b| = |c| = 2 \Rightarrow$ A, B et C $\in$ au cercle de centre O et de rayon 2

$B \in [Ot)$ tel que $(\widehat{\vec{u},\vec{Ot}}) \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

B et C ont même abscisse.

2) a) $Z = \dfrac{a-b}{c-b} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{-2i} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$Z = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) $|Z| = \dfrac{|a-b|}{|c-b|} = \dfrac{BA}{BC}$ d'autre part $|Z| = \left|e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = 1$ donc $\dfrac{BA}{BC} = 1 \Rightarrow BA = BC$

D'où le triangle ABC est isocèle de sommet principal B.

Exercice 4

1) a) $z' = x' + iy' = \dfrac{z}{z-i} = \dfrac{x+iy}{x+i(y-1)} = \dfrac{(x+iy)\left[x-i(y-1)\right]}{x^2+(y-1)^2} = \dfrac{x^2-ix(y-1)+ixy+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$

$$= \frac{x^2+i(xy-xy+x)+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{x}{x^2+(y-1)^2}$$

Donc $\begin{cases} x' = \dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} \\ y' = \dfrac{x}{x^2+(y-1)^2} \end{cases}$

b) $*$ $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $(x,y) \neq (0,1)$ donc $E = (O,\vec{u}) \setminus \{A\}$

$*$ z' imaginaire $\Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-y = 0$ et $(x,y) \neq (0,1)$

$$x^2+y^2-y = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

En plus pour $(x,y) = (0,1)$; $0^2 + \left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

<u>Conclusion</u> : F est le cercle de centre $I\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ privé du point B

2) a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$; $z' - 1 = \dfrac{z}{z-i} - 1 = \dfrac{z-z+i}{z-i} = \dfrac{i}{z-i}$

b) $M(z)$ varie sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 1 $\Rightarrow BM = 1 \Leftrightarrow |z-i| = 1$

Donc $|z'-1| = \left|\dfrac{i}{z-i}\right| = \dfrac{|i|}{|z-i|} = \dfrac{1}{1} = 1$

Alors le point $M'(z')$ varie sur le cercle $\mathscr{C}'$ de centre A et de rayon 1.