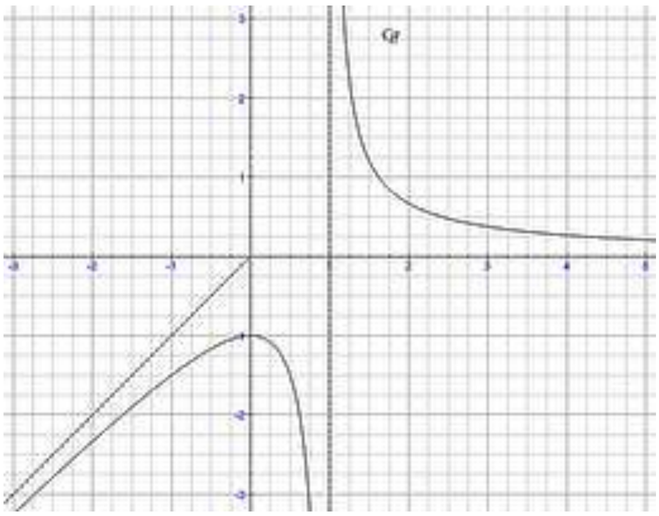
Prof	Mechmeche Imed	Devoir de contrôle N°1	Matière	Maths
Lycée	Borj-cedria		Date	14/11/2012
Niveau	4ème		Durée	2 h

Exercice 1 : (3 pts)

Répondre par vrai ou faux sans justification

1) Soit $z = \frac{ie^{i\frac{\pi}{6}}}{1-i}$, alors un argument de z est $\frac{11\pi}{12}$
2) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $z = i\bar{z}$ est une droite
3) Si $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$ alors $\arg(a+b) = \frac{\alpha+\beta}{2}$
4) $\left(\sqrt{3}+i\right)^6 = -64$

Exercice 2 : (6 pts)



Dans la figure ci-contre C_g est la représentation graphique d'une fonction g
définie est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. On sait que :

- $y = 0$ est asymptote à C_g en $+\infty$
- $y = x$ est asymptote à C_g en $-\infty$
- $x = 1$ est asymptote verticale

1) Par une lecture graphique déterminer :

$$\lim_{-\infty} g \quad , \quad \lim_{+\infty} g \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) - x$$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin g(x)}{g(x)} & si\ \ x \in]1,+\infty[\\ \frac{x}{g(x)} & si\ x\ \in]-\infty,1[\end{cases}$

a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
b) Montrer que pour $x > 1$ on a $\frac{-1}{g(x)} \leq f(x) \leq \frac{1}{g(x)}$
c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 1
d) Sachant que $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ et $g\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{13}{4}$ montrer que l'équation $f(x) = -\frac{1}{4}$ admet au moins une solution dans $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$

Exercice 3 : (5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{U},\vec{V})$

Soit le nombre complexe $z = 2i + 2e^{i\theta}$. $\theta \in [0,\pi]$

1) Vérifier que $z = 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\ e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$
2) Pour cette question on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$

   a- écrire z sous forme algébrique puis montrer que $|z|^2 = 8 + 4\sqrt{3}$

   b- écrire z sous forme exponentielle

   c- en déduire la valeur exacte de $cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$
3) Soit les points $N(e^{i\theta})$, $A(-i)$ et $I(1)$, Déterminer la forme exponentielle de $\frac{Z_{\overrightarrow{AN}}}{Z_{\overrightarrow{AI}}}$
4) En déduire la valeur de θ pour laquelle $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux.

Exercice 4 : (6 pts)

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n - 2} + 2 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq U_n \leq 11$
2) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 2}\left(1 - \sqrt{U_n - 2}\right)$
3) Montrer alors que la suite U est décroissante.
4) Déduire de ce qui précède que $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.
5) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 < (U_{n+1} - 3) \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$

   b- En déduire que $0 < (U_n - 3) \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

   c- Retrouver alors la limite de la suite U.

Bon travail. ☺