

NB : - Il sera tenu compte de la rédaction et la rigueur de raisonnement.
- Tout résultat parachuté sera compté faux

Exercice n°1 : Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : dans chaque phrase une seule réponse est correcte choisir la.

1) z et z' sont deux nombres complexes non nuls

tels que $|z + z'| = |z| + |z'|$ alors

a/ $\operatorname{Re}(z \bar{z}') = |z| |z'|$; b/ $\arg \bar{z} \equiv \arg(z')$ [2κ] ; c/ $\bar{z} z'$ est imaginaire pur

2) Si z est un nombre complexe vérifiant $z \neq 1$, $z \neq -1$ et $|z| = 1$ alors $\frac{1+z}{1-z}$ est

a/ imaginaire pur ; b/ réel ; c/ égale à 1

3) Si O, I, M trois points d'affixes respectives $o, -1 - i$ et z tels que $|(1+i)z + 2i| = 3$ alors l'ensemble des points M est :

a/ $\{I\}$; b/ $\mathbf{L}_{(0; \sqrt{3})}$; c/ $\mathbf{L}_{(I; \frac{3\sqrt{2}}{2})}$

4- La forme polaire de $\frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}$ est a/ $\left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{12}\right]$; b/ $\left[\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{12}\right]$; c/ $\left[\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$

Partie B : ajouter l'hypothèse qui manque dans chaque phrase

1) Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ existent **alors** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe

2) Si f est définie sur un intervalle ouvert I pointé en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe **alors** f est prolongeable par continuité en x_0 .

3) Si f et g deux fonctions tels que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ **alors** $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = L$

4) Si f est définie sur un intervalle I et g est définie sur un intervalle J **alors** la fonction $g \circ f$ est définie sur I par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exercice n°2 :

Soit le nombre complexe $z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

1) a/ Calculer z^2 puis déterminer sa forme trigonométrique
b/ En déduire la forme trigonométrique de z

2) Donner les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (o, u, v)

a/ Construire le point A, B et C d'affixes respectives z, z^2, iz^2

b/ Placer le point D symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées et écrire z_D sous forme trigonométrique.

Exercice n°3 :

Soit $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives

$$z_1 = 1 + i + (1-i) \operatorname{tg} \alpha \text{ et } z_2 = 1 + i - (1-i) \operatorname{tg} \alpha$$

1) a/ Vérifier que $z_1 = (1+i)(1-i \operatorname{tg} \alpha)$

b/ Donner la forme trigonométrique de z_1 .

2) Donner la forme trigonométrique de z_2 .

3) Soit le point A d'affixe $1 + i$, montrer que (OA) est la médiatrice de $[M_1M_2]$.

4) Montrer que lors que $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, le point M décrit une droite Δ que l'on précisera.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x < 0 \\ \pi - \frac{\sin \pi x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, interpréter graphiquement le résultat

4) a/ Montrer que pour tout $x > 0$; $\pi - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \pi + \frac{1}{x}$

b/ Dédire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; interpréter le résultat.

5) On pose pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$; $k(x) = \operatorname{tg} x$ et $h(x) = g \circ k(x)$.

a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$

b/ Etudier la continuité de h sur $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$

c/ Vérifier que pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$; $h(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ et retrouver $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$

Avec mes encouragements Essahli Imed