L.7.11 Sahline   A.S :2008/2009

Devoir de contrôle N°1

Classes 4ème

Durée : 2.h

Exercice N°1: (4 pts)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse proposée est exacte.
L'exercice consiste à cocher la réponse exacte sans justification.

1/ Si f est continue et strictement décroissante sur $[1,8]$ et si $f([1;8])=[-1,8]$ alors :

☐ f(1)= -1 et f(8)=8   ☐ -1< f(1) <8   ☐ f(1)=8 et f(8)= -1

2/ Si f est continue sur $[-2,2]$ et si $f([-2,2])=[-5,-3]$ alors l'équation f(x)=0

☐ n'admet pas de solution dans $[-2,2]$ ☐ admet au moins une solution   ☐ admet une unique solution

3/ Si f est strictement croissante non majorée sur $]3,+\infty[$ alors :

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

4/ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $g(x)=\cos(\frac{1}{x})-f(x)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ est égale à

☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ $-\infty$

Exercice N°2: (4 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o;\vec{u};\vec{v})$.

A , B,D, M et M' sont les points d'affixes respectives : i , 2 , -i , z (différent de 2) et $z'=\dfrac{z-i}{iz-2i}$

1/a) Montrer que $|iz-2i|=BM$

b) Déduire que $|z'|=\dfrac{AM}{BM}$

c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice de [AB]

2/a) Montrer que $(z'+i)(iz-2i)=2-i$

b) Déduire que $M'D.BM=\sqrt{5}$

c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M varie sur le cercle $\zeta_{(B;2)}$

Exercice N°3: (6 pts)

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{2}\,i\,z - 1 = 0$

2/ θ étant un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

On considère l'équation $(E_\theta) : z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{2i\theta} = 0$

a) Vérifier que : $((1-i)e^{i\theta})^2 = -2ie^{2i\theta}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

3/ On donne les nombres complexes suivants : $a = e^{i\theta}$; $b = ie^{i\theta}$ et $c = 1+i$

a) Donner la forme exponentielle de b , c et a+b

b) Déduire les valeurs exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$. (Indication : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$)

Exercice N°4: (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2+x+2} - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1/a) Montrer que pour tout x de $]-\infty, 1[$ on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$

b) Déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2/ Montrer que f est continue en 1

3/ Montrer que l'équation f(x)=0 admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

4/a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

b) Soit $g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{\cos x}) & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$